Physique et Chimie : 2ème Année Bac

Séance 26A (Aspects énergétiques des oscillateurs mécaniques – Pendule élastique)

Professeur : Mr EL GOUFIFA Jihad

Sommaire

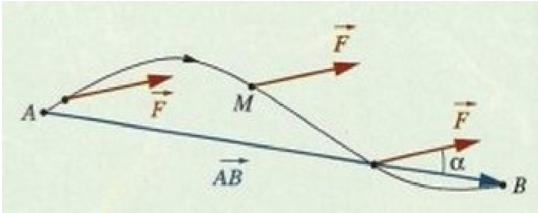
I- Travail de la tension d'un ressort

1-1/ Travail d'une force constante

Le travail d'une force constante entre deux points A et B est égale au produit scalaire du vecteur force $\overrightarrow{F}$ par le vecteur déplacement $\overrightarrow{AB}$:

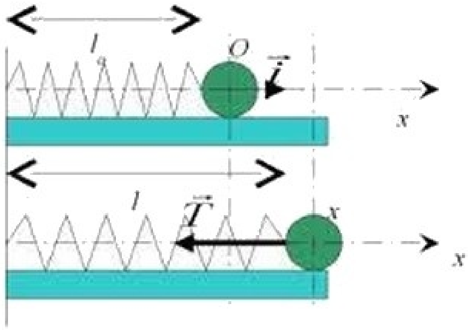
$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB.\cos\alpha$$

avec $W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right)$ en joule (J), $\overrightarrow{F}$ en newton (N), AB en mètre (m) et $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{F}.\overrightarrow{AB}}\right)$



1-2/ Travail de la tension d'un ressort

Considérons un ressort de longueur initiale l_0 et de constante de raideur K placé sur un plan horizontal :



La tension du ressort. $\overrightarrow{T} = -K.x.\overrightarrow{i}$ n'est pas une force constante.

Pour calculer le travail de cette force on doit considérer le travail élémentaire de cette force δW sir un déplacement infiniment petit $\overrightarrow{\delta l}$ sur lequel nous considérerons que la force est constante :

$$\delta W = \overrightarrow{T}.\overrightarrow{\delta l} = \overrightarrow{T}.\delta x.\overrightarrow{i} = -K.x.\delta x$$

Le travail total de la tension $\overrightarrow{T}$ du ressort lorsque son point d'application se déplace d'un point d'abscisse x_1 à un point d'abscisse x_2 est la somme des travaux élémentaires, on l'obtient en utilisant le calcul intégral :

$$W_{x_1 \to x_2}\overrightarrow{T} = \int_{x_1}^{x_2} -Kx\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}K\left({x_1}^2 - {x_2}^2\right)$$

II- Étude énergétique du pendule élastique

2-1/ L'énergie cinétique

C'est l'énergie qu'un corps possède du fait de son mouvement, son unité est Joules (J).

Elle est donné par la relation suivante : $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

2-2/ L'énergie potentielle

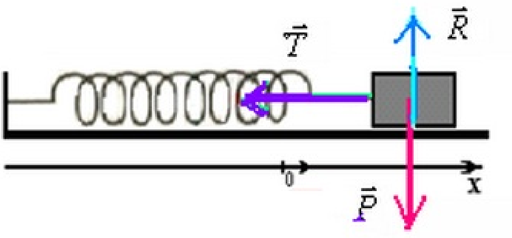
L'énergie potentielle élastique d'un pendule élastique est l'énergie qu'il possède grâce à la déformation du ressort.

Elle est égale au travail que doit effectuer un opérateur pour le déformer.

Elle est donnée par la relation suivante : $E_{pe} = \frac{1}{2}K.x^2$

2-3/ Conservation de l'énergie mécanique

Pendant les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique horizontal constitué d'un corps S de masse m et d'un ressort de constante de raideur K, appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur le corps S entre un point M_1 d'abscisse x_1 et un point M_2 d'abscisse x_2 :



On a :

$$\Delta_{1\to 2}E_c = W_{1\to 2}\overrightarrow{T} = -\Delta_{1\to 2}E_{pe}$$
$$\Rightarrow E_{c2} - E_{c1} = -\left(E_{pe2} - E_{pe1}\right)$$
$$\Rightarrow E_{c2} + E_{pe2} = E_{c1} + E_{pe1}$$
$$\Rightarrow \; E_{m2} = E_{m1}$$

Donc lorsque les frottements sont absents, l’énergie mécanique se conserve.

2-4/ Détermination de l'équation différentielle par étude énergétique

Si les frottement sont négligeables, l'énergie mécanique de l'oscillateur est constante :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_{pe}}{dt} + \frac{dE_c}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = 0$$
$$\Rightarrow k.\,x.\,\dot{x} + m.\,\dot{x}.\,\ddot{x} = 0$$
$$\Rightarrow \; \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

C’est la même équation différentielle obtenue à partir l’étude dynamique.

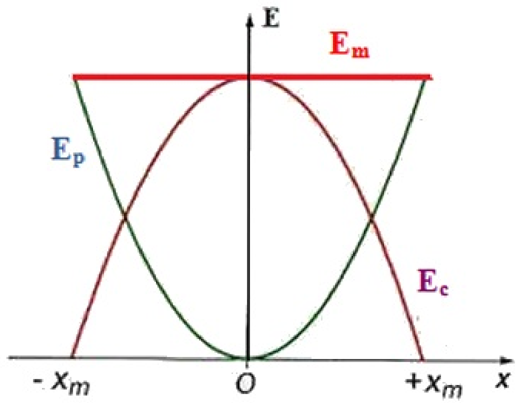
III- Diagrammes énergétiques

3-1/ Cas des oscillations sans frottements

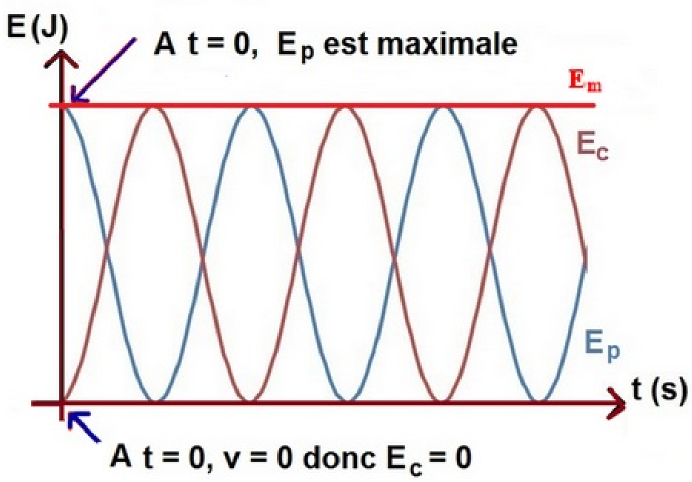
Dans le cas des oscillations sans frottements l'énergie mécanique de l'oscillateur mécanique est constante :

$$E_m = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = Cte$$

En représentant la variation E_{pe}, E_c et E_m en fonction de x on obtient le diagramme suivant :

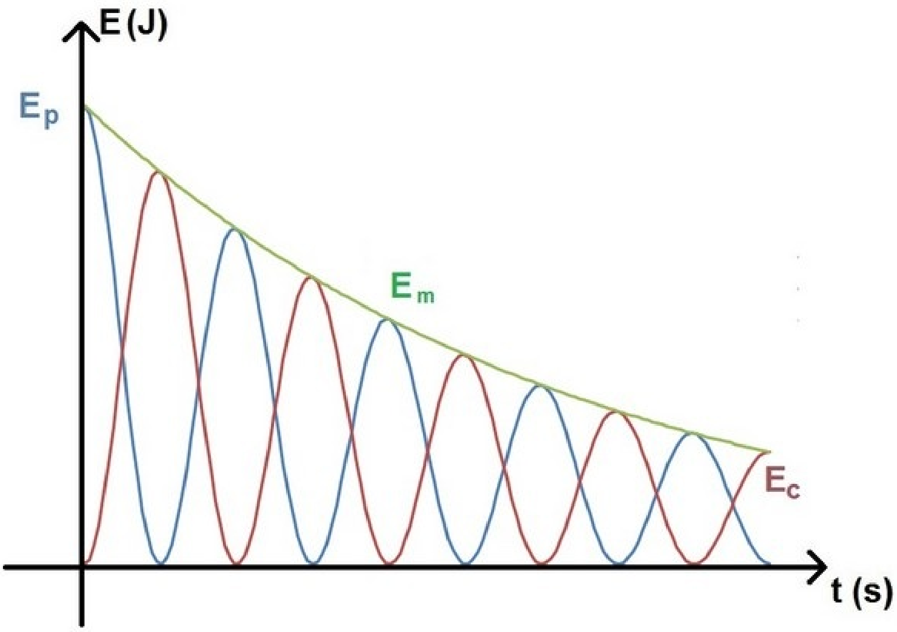


En représentant la variation E_{pe}, E_c et E_m en fonction du temps on obtient le diagramme suivant :



3-2/ Cas des oscillations avec frottements

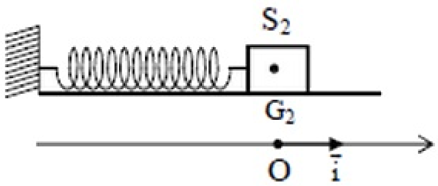
Dans le cas des oscillations avec frottements l'énergie mécanique de l'oscillateur mécanique diminue jusqu'à ce qu'elle s'annule :



IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

On relie un corps solide S_2, de masse $m_2 = 182g$, à un ressort à spires non jointive, de masse négligeable et de raideur K, et on fixe l'autre bout du ressort à un support fixe :



Le corps S_2 peut glisser sans frottement sur un plan horizontal.

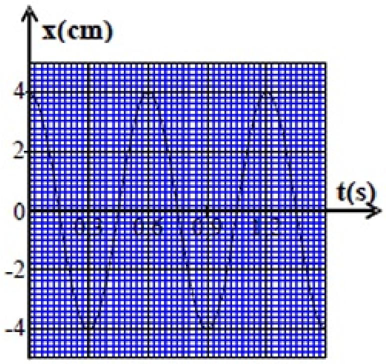
On écarte le corps S_2 de sa position d'équilibre de la distance X_m, et on le libère sans vitesse initiale.

Pour étudier le mouvement de G_2, on choisie le référentiel galiléen $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ tel que la position de G_2 à l'origine des dates est confondue avec l'origine O.

On repère la position de G_2 à l'instant t par l'abscisse x dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$.

L'équation différentielle du mouvement de G_2 s'écrit $\ddot{x} + \frac{K}{m^2}x = 0$, et sa solution est de la forme $x\left(t\right) = X_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$.

L'étude expérimentale du mouvement de G_2 a permis d'obtenir le graphe représenté sur la figure suivante :



1. Déterminer en exploitant le graphe les grandeurs suivantes : l'amplitude X_m, la période T_0 et φ la phase à l'origine des dates.
2. En déduire la raideur K du ressort.

On choisi le plan horizontal passant par la position de G_2 à l'équilibre comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur et l'état où le ressort n'est pas déformé comme origine de l'énergie potentielle élastique.

3. Montrer que l'énergie cinétique E_C du corps S_2 s'écrit : $E_C = \frac{K}{2}\left({X_m}^2 - x^2\right)$
4. Trouver l'expression de l'énergie mécanique du système {corps S_2 - ressort} en fonction de X_m et K et en déduire la vitesse v_{G_2} lorsque G_2 passe par la position d'équilibre dans le sens positif.

4-2/ Exercice 2

Les ressorts se trouvent dans plusieurs appareils mécaniques, comme les voitures et les bicyclettes... et produisent des oscillations mécaniques.

Cette exercice a pour objectif l'étude énergétique d'un système oscillant {corps solide - ressort} dans une position horizontale.

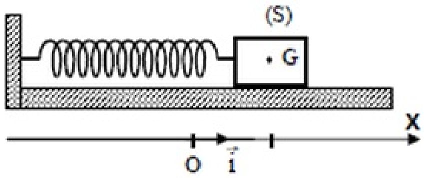
Soit un oscillateur mécanique horizontal composé d'un corps solide (S) de masse m et de centre d'inertie G fixé à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives et de masse négligeable et de raideur $K = 10 N.m^{-1}$.

L'autre extrémité du ressort est fixée à un support fixe.

Le corps (S) glisse sans frottement sur le plan horizontal.

On étudie le mouvement de l'oscillateur dans le repère $\left(O, \vec{i}\right)$ lié à la Terre et dont l'origine est confondue avec la position de G à l'équilibre de (S).

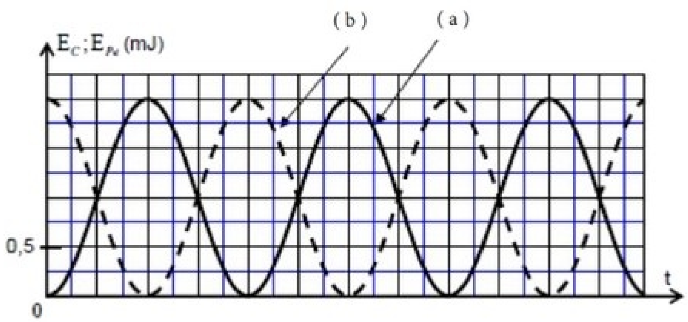
On repère la position de G à l'instant t par son abscisse x :



On écarte le corps (S) horizontalement de sa position d'équilibre dans le sens positif d'une distance X_0 et on le libère sans vitesse initiale à l'instant pris comme origine des dates.

On choisie le plan horizontal passant par G comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur, et l'état dans lequel le ressort n'est pas déformé comme référence de l'énergie potentielle élastique.

À l'aide d'un dispositif informatique adéquat, on obtient les deux courbes représentant les variations de l'énergie E_C cinétique et l'énergie potentielle élastique E_{Pe} du système oscillant en fonction du temps :

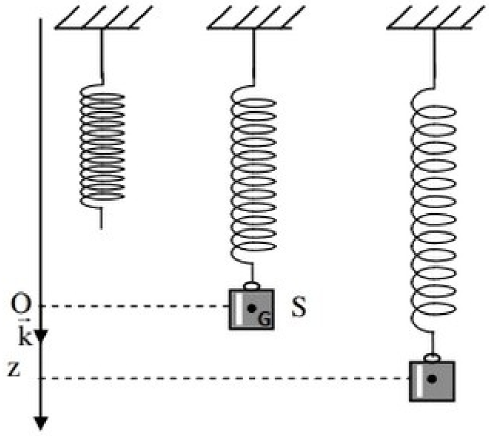


1. Indiquer parmi les courbes (a) et (b) celle qui représente les variations de l'énergie cinétique E_C. Justifier votre réponse.
2. Déterminer la valeur de l'énergie mécanique E_m du système oscillant.
3. En déduire la valeur de la distance X_0.
4. En considérant la variation de l'énergie potentielle élastique du système oscillant, trouver le travail $W_{A\to O}\left(\vec{T}\right)$ de la force de rappel $\vec{T}$ exercée par le ressort sur (S) lors du déplacement de G de la position A d'abscisse $x_A = X_0$ vers la position O.

4-3/ Exercice 3

Un oscillateur mécanique vertical est constitué d'un corps solide S de masse $m = 200g$ et d'un ressort à spires non jointives de masse négligeable et de raideur K.

L'une des extrémités du ressort est fixée à un support fixe et l'autre extrémité est liée au solide S :



On se propose d'étudier le mouvement du centre d'inertie G du solide S dans un repère $R\left(O, \vec{k}\right)$ lié à un référentiel terrestre supposé galiléen.

On repère la position de G à un instant t par la côte z sur l'axe $\left(O, \vec{k}\right)$.

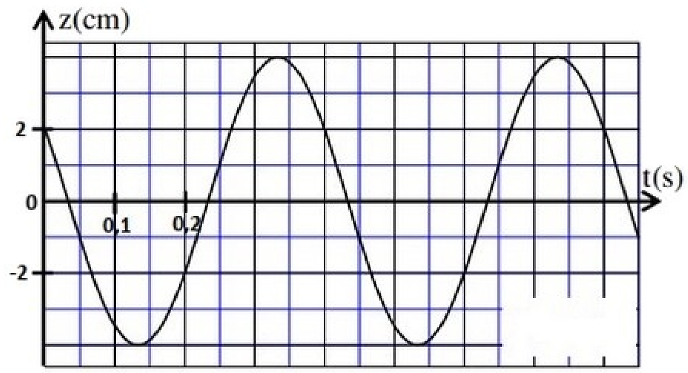
À l'équilibre, G est confondu avec l'origine O du repère $R\left(O, \vec{k}\right)$.

On prendra $\pi^2 = 10$.

Frottements négligeables

On écarte verticalement le solide S de sa position d'équilibre et on l'envoie à l'instant de date $t = 0$, avec une vitesse initiale $\vec{V_0} = V_{0z}\,\vec{k}$.

La courbe suivante représente l'évolution de la côte $z(t)$ du centre d'inertie G :



1. Déterminer, à l'équilibre, l'allongement Δl_0 du ressort en fonction de m, K et de l'intensité de la pesanteur g.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la côte z du centre d'inertie G.

La solution de cette équation différentielle s'écrit $z = z_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$, avec T_0 la période propre de l'oscillateur.

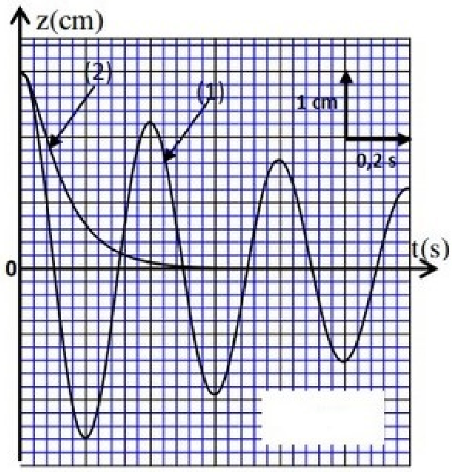
3. Déterminer la valeur de K et celle de V_{0z}.

Frottements non négligeables

On réalise deux expériences en plongeant l'oscillateur dans deux liquides différents.

Dans chaque expérience, on écarte verticalement le solide S de sa position d'équilibre d'une distance z_0 et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$, le solide S oscille alors à l'intérieur du liquide.

Les courbes (1) et (2) de la figure suivante représentent l'évolution de la côte z du centre d'inertie G au cours du temps dans chaque liquide :



4. Associer à chaque courbe le régime d'amortissement correspondant.

On choisit le plan horizontal auquel appartient le point O, origine du repère $R\left(O, \vec{k}\right)$, comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} ($E_{pp} = 0$), et l'état où le ressort est non déformé comme état de référence de l'énergie potentielle élastique E_{pe} ($E_{pe} = 0$).

5. Pour les oscillations correspondant à la courbe (1), trouver à un instant de date t, l'expression de l'énergie potentielle $E_p = E_{pp} + E_{pe}$ en fonction de K, z et $\Delta l'_0$ l'allongement du ressort à l'équilibre dans le liquide.
6. Pour les oscillations correspondant à la courbe (1), calculer la variation de l'énergie mécanique de l'oscillateur entre les instants $t_1 = 0$ et $t_2 = 0,4s$.