I- Exercice 1 (7 pts)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$.

Et soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

.

1. Montre que $H : x \to \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \to \frac{\ln x}{x}$.
2. Montrer que $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}$.
3. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}\,x = 1$.
4. Vérifier que $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.
5. Montrer que l'aire de la partie délimité par $(\mathscr{C}_f)$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est égale à $0,5cm^2$

II- Exercice 2 (3 pts)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + x\ln x$.

Et soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

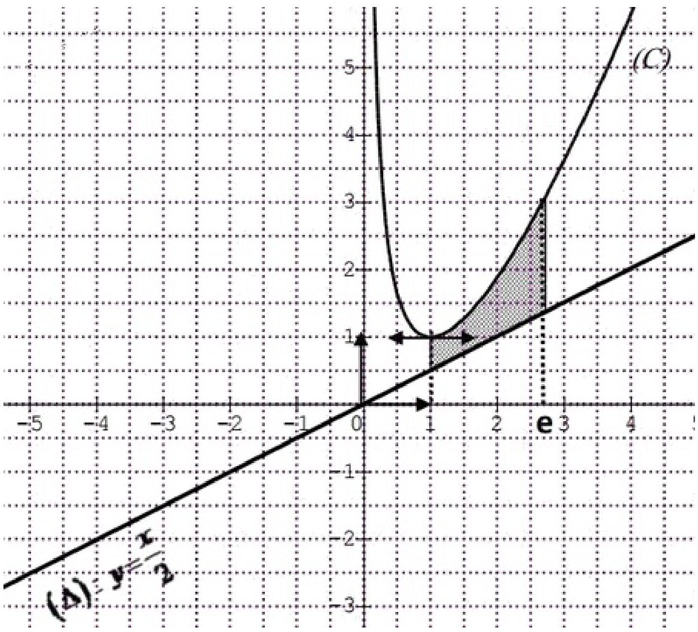
.

Soit la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = -\frac{x^2}{4} + \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)\ln x$

1. Montre que F est une fonction primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$

Dans la figure suivante $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative de la fonction f et (Δ) est une droite d'équation $y = \frac{x}{2}$.

2. Calculer l'aire de la partie hachurée.



III- Exercice 3 (3 pts)

Un sac contient 7 boules indiscernables au toucher : 4 boules rouges et 3 boules vertes.

On tire une boule « b » du sac et on note sa couleur.

- Si b est rouge on la remet dans le sac puis on tire une deuxième boule.
- Si b est verte on ne remet pas la boule dans le sac puis on tire une deuxième boule.

On considère les événements suivants :

A : « obtenir deux boules de même couleur dans les deux tirages »

B : « obtenir une boule rouge dans la deuxième tirage »

1. Montre que $P\left(A\right)=\frac{23}{49}$ et calculer $P\left(B\right)$.
2. Les événements A et B sont –t-ils indépendants ? Justifiez votre réponse.

IV- Exercice 4 (7 pts)

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher : 3 boules vertes, 3 boules rouges et 2 blanches.

On tire simultanément au hasard trois boules du sac.

On considère les événements suivants :

A : « obtenir une boule verte au moins »
B : obtenir une boule verte et deux boules blanches »

1. Montrer que $P\left(A\right)=\frac{23}{28}$.
2. Calculer $P\left(B\right)$.

Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules rouges tirées.

3. Montrer que $p\left(X=1\right)=\frac{15}{28}$.
4. Déterminer la loi de probabilité.
5. Calculer $E\left(X\right)$ l'espérance mathématique et $V\left(X\right)$ la variance de la variable aléatoire X .