AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Examen National 2021 Session Rattrapage

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Exercice 1 : Suites numériques (4 pts)

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < u_n < 1$

2)

a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)^2}{3-u_n}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3) On pose $v_n = \frac{1}{1-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.

b. Déterminer v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = \frac{n+1}{n+3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

c. Calculer la limite de la suite (u_n).

4. A partir de quelle valeur de n, a-t-on $u_n \geq \frac{1011}{1012}$?

Exercice 2 : Nombres complexes (5 pts)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 3 + 2i$, $b = 3 - 2i$ et $c = -1 - 2i$.

a. Écrire $\frac{c-b}{a-b}$ sous forme trigonométrique.

b. En déduire la nature du triangle ABC.

3) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit M un point du plan d'affixe z et le point M' d'affixe z' l'image de M par R, et soit D le point d'affixe $d = -3 - 4i$.

a. Écrire z' en fonction de z.

b. Vérifier que C est l'image de A par R.

4)

a. Montrer que les points A, C et D sont alignés.

b. Déterminer le rapport de l'homothétie h de centre C et qui transforme A en D.

c. Déterminer l'affixe m du point E pour que le quadrilatère $BCDE$ soit un parallélogramme.

5)

a. Montrer que $\frac{d-a}{m-b}$ est un nombre réel.

b. En déduire que le quadrilatère $ABED$ est un trapèze isocèle.

Exercice 3 : Fonctions numériques (3 pts)

On considère la fonction numérique h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = x + \ln x$

1. Montrer que la fonction h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
2. Déterminer $h(]0;+\infty[)$.

3)

a. En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$.

b. Montrer que $0 < \alpha < 1$.

4)

a. Vérifier que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.

b. En déduire que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 2$.

Problème : Étude de fonctions numériques et calcul intégral (8 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - xe^{-x+1}$.

Soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : $1cm$)

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

2)

a. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

3)

a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = (x-1)e^{-x+1}$

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4)

a. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet un point d'inflexion d'abscisse 2.

5. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (On prend $f(2) \simeq 1,25$).
6. Déterminer la valeur minimale de la fonction f et en déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^{x-1} \geq x$.

7)

a. En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_0^2 xe^{-x}\,\mathrm{d}\,x$.

b. En déduire que $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x = 4 - e + 3e^{-1}$.

8) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;1]$.

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Construire la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

c. A partir de la courbe représentative de g^{-1}, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{g^{-1}(x)}{x}\right)$.