

Exercice 1 (4,5 pts)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n - 9}{u_n - 5}$ pour tout n de \mathbb{N} .

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n < 3$
- 3)
 - a. Vérifier que pour tout n de \mathbb{N} : $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)^2}{5 - u_n}$
 - b. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- 5) On pose pour tout n de \mathbb{N} : $v_n = \frac{-2u_n + 4}{u_n - 3}$
 - a. Vérifier que $v_0 = -1$.
 - b. Montrer que $v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{u_n - 3}$.
 - c. En déduire que (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.
- 6)
 - a. Montrer que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n = \frac{3v_n + 4}{v_n + 2}$
 - b. En déduire que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n = \frac{3n + 1}{n + 1}$
 - c. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

Exercice 2 (4 pts)

(Les résultats seront donnés sous forme de fraction)

Un sac S_1 contient deux boules blanches, une boule rouge et trois boules vertes.

Un autre sac S_2 contient une boule blanche, deux boules rouges et une boule verte.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On considère l'expérience suivante : « on tire une boule du sac S_1 puis on tire une boule du sac S_2 »

On considère les événements suivants :

A : « Les deux boules tirées sont blanches »

B : « Les deux boules tirées sont de couleurs différentes »

1. Montrer que $p(A) = \frac{1}{12}$.
2. Montrer que $p(\overline{B}) = \frac{7}{24}$ (\overline{B} est l'événement contraire de B), et en déduire $p(B)$.

3. Calculer $p(A \cup B)$.

Exercice 3 (11,5 pts)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (1 - \ln x) \ln x$$

Et soit (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, et interpréter géométriquement le résultat.
- 2)
 - a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - b. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$, Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.
- 3)
 - a. Montrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{x} (1 - 2 \ln x)$.
 - b. Montrer que f est croissante sur $]0; \sqrt{e}]$, et qu'elle est décroissante sur $[\sqrt{e}; +\infty[$.
 - c. Calculer $f(\sqrt{e})$ puis dresser le tableau de variations de f .
 - d. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et en déduire les coordonnées des points d'intersection de (\mathcal{C}_f) avec l'axe des abscisses.
 - e. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}_f) au point d'abscisse $x_0 = 1$.
- 4)
 - a. Montrer que $f''(x) = \frac{1}{x^2} (2 \ln x - 3)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.
 - b. Montrer que $A\left(e^{\frac{3}{2}}; \frac{-3}{4}\right)$ est un point d'inflexion de (\mathcal{C}_f) .
- 5) Dans la figure ci-dessous (\mathcal{C}_f) est la courbe représentative de f , et soit F la fonction définie par $F(x) = -x(\ln x)^2 + 3x \ln x - 3x$.
 - a. Montrer que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
 - b. A partir de la courbe (\mathcal{C}_f) ci-dessous, donner les variations de F sur $]0; +\infty[$.
 - c. Calculer l'aire de la partie hachurée.

