Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Examen National 2019 Session Rattrapage

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1,2,2)$, $B(3,-1,6)$ et $C(1,1,3)$.

1)

a. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

b. En déduire que $x - 2y - 2z + 7 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

Soient les points $E(5,1,4)$ et $F(-1,1,12)$ et (S) l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 0$.

2. Montrer que (S) est la sphère ce centre $\Omega(2,1,8)$ et de rayon $R = 5$.

3)

a. Calculer $d(\Omega,(ABC))$ la distance du point Ω au plan (ABC).

b. En déduire que le plan (ABC) oupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $r = 4$.

Exercice 2 : Nombres complexes (3 pts)

1)

a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b. On pose $a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, écrire a sous forme trigonométrique.

2. On considère le nombre complexe $b = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, vérifier que $b^2 = i$.

3. On pose $h = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, montrer que $h^4 + 1 = a$.

4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le point B d'affixe b et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Soit c l'affixe du point C image du point B par la rotation R. Montrer que $c = ib$

b. En déduire la nature du triangle OBC.

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 pts)

Une urne contient 1 boule rouge, 2 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement et avec remise 3 boules de l'urne.

Soient les événements suivants :

- A : "Les trois boules tirées sont de même couleur".
- B : "Il n' y a aucune boule blanche parmi les boules tirées".
- C : "Il y a exactement deux boules blanches parmi les boules tirées".

1. Montrer que $p(A) = \frac{1}{6}$ et $p(B) = \frac{8}{27}$.
2. Calculer $p(C)$.

Problème : Étude de fonctions numériques, calcul intégral et suites numériques (11 pts)

Partie 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f\left(x\right) = 2 + 8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$.

Soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : $1cm$).

1)

a. Vérifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et interpréter le résultat géométriquement.

b. Vérifier que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

2)

a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b. Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3)

a. Montrer que $f'(x) = \frac{8(x-2)\left(x^2-2x+4\right)e^{x-4}}{x^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

b. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$: $x^2 - 2x + 4 > 0$.

c. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]0, 2]$ et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $[2, +\infty[$.

d. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

4. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

5)

a. Vérifier que la fonction $H : x \mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur $[2, 4]$.

b. Vérifier que $f\left(x\right) = 2 + 8e^{x-4} - 32\frac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

c. Calculer l'intégrale $\int_2^4 e^{x-4}\,\mathrm{d}\,x$

d. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

Partie 2

1) On considère la fonction numérique g définie sur $[2,4]$ par $g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2$.

a. Calculer $g(4)$.

b. Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$: $g(x) = -(x-4)^2 e^{x-4} + x^2\left(e^{x-4} - 1\right)$.

c. Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$: $e^{x-4} - 1 \leq 0$, puis en déduire que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$: $g(x) \leq 0$.

2)

a. Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$: $f(x) - x = \left(\frac{x-2}{x^2}\right) g(x)$

b. En déduire que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$: $f(x) \leq x$

3) Soit (u_n) la suite numérique définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Déterminer la monotonie de la suite (u_n) et en déduire qu'elle est convergente

c. Calculer la limite de la suite (u_n).