

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, -1, -1)$, $B(0, -2, 1)$ et $C(1, -2, 0)$.

1)

a. Montrer que $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

b. En déduire que $x + y + z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

Soit (S) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$

2. Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega(2, -1, 1)$ et que son rayon est $R = \sqrt{5}$.

3)

a. Calculer $d(\Omega, (ABC))$ la distance du point Ω au plan (ABC) .

b. En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) (la détermination du centre et du rayon de (Γ) n'est pas demandée).

Exercice 2 : Nombres complexes (3 pts)

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 - i\sqrt{3}$, $b = 2 + 2i$, $c = \sqrt{3} + i$ et $d = -2 + 2\sqrt{3}$.

a. Vérifier que $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$.

b. En déduire que les points A, C et D sont alignés.

On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

3. Vérifier que $z' = \frac{1}{2}az$

4) Soient H l'image du point B par la rotation R , h son affixe et P le point d'affixe p tel que $p = a - c$.

a. Vérifier que $h = ip$.

b. Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O .

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 pts)

Une urne contient 10 boules: 3 boules vertes, 6 boules rouges et 1 boule noire indiscernables au toucher.

On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

- A : « Obtenir 3 boules vertes ».
- B : « Obtenir 3 boules de même couleur ».
- C : « Obtenir au moins 2 boules de même couleur ».

1. Montrer que $p(A) = \frac{1}{120}$ et $p(B) = \frac{7}{40}$.

2. Calculer $p(C)$.

Problème : Étude de fonctions numériques, calcul intégral et suites numériques (11 pts)

Partie 1

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

Soit (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité : 1cm)

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

2)

a. Vérifier que pour tout x de $]0; +\infty[$: $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right) \ln x$.

b. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

c. Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$: $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$, puis en déduire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0.$$

d. Montrer que (\mathcal{C}) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$.

3)

a. Montrer que pour tout x de $]0; 1]$: $(x - 1) + \ln x \leq 0$, et que pour tout x de $[1; +\infty[$: $(x - 1) + \ln x \geq 0$.

b. Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

4)

a. Montrer que $f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

b. En déduire que (\mathcal{C}) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

5)

a. Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$: $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$, et déduire la position relative de (\mathcal{C}) et (Δ) .

b. Construire (\mathcal{C}) et (Δ) dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

6)

- Montrer que la fonction $H : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$.
- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$.
- Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (\mathcal{C}) et (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Partie 2

Soit (u_n) la suite numérique définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1)

- Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 - En déduire que la suite (u_n) est convergente.
2. Calculer la limite de la suite (u_n)