Mathématiques : 3ème Année Collège

Séance 15 (Systèmes de 2 équations à 2 inconnues)

Professeur : Mr BENGHANI Youssef

Sommaire

I- Système de 2 équations du premier degré à 2 inconnues

1-1/ Définition

Soient a, b, c, a', b' et c' des nombres réels donnés et x et y deux nombres réels inconnus.

On appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues toute écriture de la forme :

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

1-2/ Exemples

On considère les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ -3x-4y=-2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x-3y=\frac{2}{3} \\ -3x+y+2=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{x+2y}{2}-1=0 \\ 3x+y=-4 \end{cases}$$

II- Résolution algébrique d'un système de 2 équations à 2 inconnues

2-1/ Définition

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues x et y, c'est trouver tous les couples (x;y), s'ils existent pour lesquels les deux équations soient vraies simultanément.

2-2/ Méthodes de résolution d'un système

Méthode par substitution

On utilise de préférence la méthode par substitution lorsque l'une des deux inconnues a pour coefficient 1 ou -1

Exemple

$$\begin{cases} 3x-y=1 \\ 2x+3y=19 \end{cases}$$

Méthode par combinaison linéaire

On utilise de préférence la méthode de combinaison linéaire dans les autres cas.

Exemple

$$\begin{cases} -5x+4y=-1 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$$

III- Résolution graphique d'un système de 2 équations à 2 inconnues

Chaque équation d'un système est lié à une droite dont on doit déterminer l'équation réduite.

Cas 1 : deux droites sécantes en un point

Soit le système : $\begin{cases} 2x-y=1 \\ -3x+y=-2 \end{cases}$

On considère les deux droites (D) et (Δ) tel que $(D):\ 2x-y=1$ et $(\Delta):\ -3x+y=-2$

Cherchons l'équation réduite de chaque droite ;

$(D) :\ y = 2x - 1$

$(\Delta) :\ y = 3x - 2$

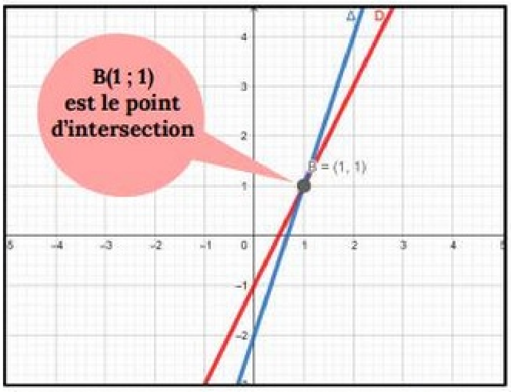
On remarque que les deux droites (D) et (Δ) n'ont pas le même coefficient directeur, donc elles se coupent en un point.

On va construire les deux droites (D) et (Δ) dans un repère orthonormé (O, I, J) :

(D)	x	y = 2x - 1	M(x , y)
A	2	2 x 2 − 1 = 3	A(2 , 3)
B	1	2 x1 − 1 = 1	B(1 , 1)

Alors (D) = (AB)

(Δ)	x	y = 3x - 2	M(x , y)
E	2	3 x 2 − 2 = 4	E(2 , 4)
F	-1	3 x (-1) − 2 = -5	F(-1 , -5)



On remarque que les deux droites (D) et (Δ) se coupent en $B(1;1)$.

Donc le système admet une unique solution, c'est le couple $(1;1)$.

Cas 2 : deux droites confondues

Soit le système : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$

On considère les deux droites (D) et (Δ) tel que $(D) :\ 2x + y = 1$ et $(\Delta) :\ 4x + 2y = 2$

Cherchons l'équation réduite de chaque droite ;

$(D) :\ y = -2x + 1$

$(\Delta) :\ y = -2x + 1$

On remarque que les deux droites (D) et (Δ) ont la même équation réduite.

Alors le système admet une infinité de solutions.

Cas 3 : deux droites strictement parallèles

Soit le système : $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 6x + 2y = -1 \end{cases}$

On considère les deux droites (D) et (Δ) tel que $(D) :\ 3x + y = 5$ et $(\Delta) :\ 6x + 2y = -1$

Cherchons l'équation réduite de chaque droite ;

$(D) :\ y = -3x + 5$

$(\Delta) :\ y = -3x - \frac{1}{2}$

On remarque que les deux droites (D) et (Δ) ont le même coefficient directeur.

Donc les deux droites sont parallèles.

IV- Résolution de Problèmes

4-1/ Règle

La résolution d'un problème se déroule en 4 étapes :

1. Choisir des inconnues.
2. Mise en système d'équations.
3. Résolution du système.
4. Retour au problème.

4-2/ Exemple

Un Musée propose un tarif pour les adultes à 9DH et un autre pour les enfants à 5DH.

Lors d'une journée, ce Musée a reçu la visite de 70 personnes et la recette totale a été de 510DH.

- Retrouve le nombre d'adultes et le nombre d'enfants ayant visité le musée lors de cette journée.

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

En utilisant la méthode de la substitution résoudre les systèmes d'équations :

$$(A) \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ -4x - 2y = -14 \end{cases}$$

5-2/ Exercice 2

En utilisant la méthode de la combinaison linéaire, résoudre les systèmes d'équations :

$$(A) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + 4y = 3 \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} -3x + 2y = 1 \\ 6x - 4y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ -2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

5-3/ Exercice 3

(O, I, J) est un repère orthonormé.

(D) et (Δ) sont deux droites définies par $(D):\ y = 5x - 3$ et $(\Delta):\ y = -3x + 13$

On considère le système : $(S) \begin{cases} 3x + y = 13 \\ -5x + y = -3 \end{cases}$

1. Tracer les deux droites (D) et (Δ).
2. Déduire graphiquement la solution du système (S).
3. Déterminer algébriquement l'intersection de ces droites.

5-4/ Exercice 4

Résoudre graphiquement les systèmes d'équations :

$$Ⓐ \begin{cases} -3x - 2y = -3 \\ 6x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$Ⓑ \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 6x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$Ⓒ \begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$$

5-5/ Exercice 5

On considère le système (S) $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ x + 3y = 13 \end{cases}$

1. Le couple $(5;2)$ est-il solution du système (S) ? Justifier.
2. Résoudre le système (S).
3. Déduire la résolution du système $\begin{cases} \sqrt{x} + 2y^2 = 9 \\ \sqrt{x} + 3y^2 = 13 \end{cases}$

5-6/ Exercice 6

Déterminer 2 nombres sachant que leur somme fait 48 et leur différence 22.

5-7/ Exercice 7

A la terrasse d'un café, Othman et ses amis consomment 4 cafés et 3 jus de fruit. Ils payent 123 DH.

A la table voisine, Ayoub et ses amis consomment 3 cafés et 1 jus de fruit. Ils payent 61 DH.

1. Déterminer le prix d'un café et celui d'un jus.