

Exercice 1 (5 pts)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{2}$ pour tout n de \mathbb{N} .

1) Calculer u_1 et u_2 .

2) Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n < -\frac{3}{4}$.

3)

a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} : $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3} \left(u_n + \frac{3}{4} \right)$.

b) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

4) Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

5) On pose pour tout n de \mathbb{N} : $v_n = u_n + \frac{3}{4}$.

a) Calculer v_0 .

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

c) Donner v_n en fonction de n .

d) En déduire que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n = -\frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n + 3 \right]$.

6) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Exercice 2 (5,5 pts)

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x)$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2)

a) Montrer que : $\forall x > 0 ; g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}$

b) Donner le signe de $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

3)

a) Calculer $g\left(\frac{1}{e}\right)$ et $g(1)$ puis dresser le tableau de variations de g .

b) A partir du tableau de variations de g , donner le signe de $g(x)$ sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$.

c) A l'aide du tableau de variations, résoudre l'inéquation : $1 + e^2 + \ln x \geq \frac{1}{x^2}$

Exercice 3 (5,5 pts)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2)

a) Montrer que : $\forall x > 0 ; f'(x) = \frac{1}{x}(2 \ln x - 1)$

b) Montrer que $f'(x) \leq 0$ sur $]0; \sqrt{e}]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $[\sqrt{e}; +\infty[$

c) Calculer $f(\sqrt{e})$ et $f(e)$ puis dresser le tableau de variations de f .

3) A partir du tableau de variations de f :

a) Donner la valeur minimale de f sur $]0; +\infty[$.

b) Déterminer l'image de l'intervalle $[\sqrt{e}; e]$ par f .

Exercice 4 (4 pts)

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1) Calculer les limites suivantes :

$$\textcircled{A} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{e^x}{e^x - 1} \right)$$

$$\textcircled{B} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + \frac{e^x}{e^x - 1} \right)$$

$$\textcircled{C} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{x^2} \right)$$

2)

a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $t^2 + t - 2 = 0$

b) En déduire dans \mathbb{R} les solutions de l'équation suivante : $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

3) Donner une primitive H de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = e^x + \frac{2 \ln x}{x}$