

I- Exercice 1 (11 pts)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3e^{2x} - 4e^x + 1$

Et soit (\mathcal{C}_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.
2. Vérifier que $f(x) = e^x (3e^x - 4 + \frac{1}{e^x}) ; \forall x \in \mathbb{R}$
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.
4. Montrer que $f'(x) = 2e^x (3e^x - 2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Étudier le signe de $f'(x)$
6. Vérifier que $f(\ln \frac{2}{3}) = -\frac{1}{3}$, puis donner le tableau de variation de f .
7. Vérifier que $f(x) = (3e^x - 1)(e^x - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
8. En déduire que (\mathcal{C}_f) coupe l'axe des abscisses au point O et au point $I(-\ln 3; 0)$
9. Montrer que $f''(x) = 4e^x (3e^x - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
10. Étudier le signe de $f''(x)$ puis déduire le point d'inflexion de (\mathcal{C}_f) .
11. Déterminer l'équation de la tangente de (\mathcal{C}_f) au point O .
12. Représenter (\mathcal{C}_f) (avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ et $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 3 \approx 1,1$)

II- Exercice 2 (9 pts)

Partie 1

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x - x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis déduire leur signe.
2. Calculer $g(0)$ puis donner le tableau de variation de g (le calcul des limites n'est pas demandé).
3. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie 2

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2e^x - x^2$

Et soit (\mathcal{C}_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

4. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, et interpréter géométriquement le résultat.

5. Vérifier que $f(x) = 2x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2} \right)$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$.
6. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.
7. Montrer que $f'(x) = 2g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
8. Étudier le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau de variation de la fonction f .
9. Vérifier que $f''(x) = 2(e^x - 1)$; $\forall x \in \mathbb{R}$
10. Étudier le signe de $f''(x)$
11. En déduire que $I(0; 2)$ est un point d'inflexion de (\mathcal{C}_f) .