

### Exercice 1 (5 pts)

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 (x^2 - x + 1) dx$$

$$J = \int_0^1 (e^x + e^{2x}) dx$$

$$K = \int_0^\pi \cos(2x) dx$$

2. Résoudre l'équation différentielle (E) :  $y'' + y' - 2y = 0$

3. Déterminer la solution  $f$  de l'équation (E) qui vérifie  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$

### Exercice 2 (4 pts)

Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules rouges et 2 boules noires (indiscernables au toucher)

On tire au hasard et simultanément 4 boules de l'urne

On considère les deux événements suivants :

- A "Obtenir une boule rouge exactement"
- B "Obtenir au moins une boule blanche"

1) Montrer que  $p(A) = \frac{1}{2}$  et  $p(B) = \frac{41}{42}$

On considère la variable aléatoire  $X$  qui relie chaque tirage par le nombre de boules rouges tirées

2. Vérifier que l'ensemble des valeurs de  $X$  est  $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
3. Déterminer la loi de probabilité de  $X$
4. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de  $X$

### Exercice 3 (5 pts)

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  les points

$A(1, 2, -2)$  et  $E(0, 3, -3)$  et  $C(1, 1, -2)$ , et le plan (P) d'équation  $x + y - 3 = 0$

1. Calculer la distance du point  $\Omega(0, 1, -1)$  au plan (P)
2. Dédire que l'équation cartésienne de la sphère (S) de centre  $\Omega$  et tangente au plan (P) est (S) :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0$
3. Déterminer  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$
4. Montrer que  $x - z - 3 = 0$  est une équation cartésienne du plan (ABC)

5. Vérifier que la sphère ( $S$ ) est tangente au plan ( $ABC$ )
6. Calculer  $\Omega C$  et déduire le point de contact de la sphère ( $S$ ) et le plan ( $ABC$ )

### Exercice 4 (6 pts)

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}$

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité  $1cm$ )

1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  et interpréter géométriquement le résultat
2. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  et interpréter géométriquement le résultat
3. Montrer que  $(\forall x \in ]0, +\infty[) f'(x) = \frac{x-1+\ln(x)}{x^2}$
4. Déduire que la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[1, +\infty[$  et décroissante sur l'intervalle  $]0, 1]$
5. Donner le tableau de variation de  $f$
6. Tracer la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
7. Montrer que  $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2}$
8. En utilisant une intégration par partie montrer que  $\int_1^e \ln(x) dx = 1$
9. Déduire l'aire du domaine délimité par la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  et l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$