Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Semestre 2 Devoir 3 Modèle 1

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Exercice 1 (5 pts)

1)Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \left(x^2 - x + 1\right) \mathrm{d}\, x$$
$$J = \int_0^1 \left(e^x + e^{2x}\right) \mathrm{d}\, x$$
$$K = \int_0^\pi \cos(2x) \,\mathrm{d}\, x$$

2. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y" + y' - 2y = 0$
3. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

Exercice 2 (4 pts)

Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules rouges et 2 boules noires (indiscernables au touche)

Oon tire au hasard et simultanément 4 boules de l'urne

On considère les deux événements suivants :

- A "Obtenir une boule rouge exactement"
- B "Obtenir au moins une boule blanche"

1)Montrer que $p(A) = \frac{1}{2}$ et $p\left(B\right) = \frac{41}{42}$

On considère la variable aléatoire X qui relie chaque tirage par le nombre de boules rouges tirées

2. Vérifier que l'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
3. Déterminer la loi de probabilité de X
4. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X

Exercice 3 (5 pts)

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ les points $A(1, 2, -2)$ et $E(0, 3, -3)$ et $C(1, 1, -2)$, et le plan (P) d'équation $x + y - 3 = 0$

1. Calculer la distance du point $\Omega(0, 1, -1)$ au plan (P)
2. Déduire que l'équation cartésienne de la sphère (S) de centre Ω et tangente au plan (P) est(S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0$
3. Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
4. Montrer que $x - z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

5. Vérifier que la sphère (S) est tangente au plan (ABC)
6. Calculer ΩC et déduire le point de contact de la sphère (S) et le plan (ABC)

Exercice 4 (6 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité $1cm$)

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et interpréter géométriquement le résultat
3. Montrer que $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \ f'(x) = \frac{x-1+\ln(x)}{x^2}$
4. Déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]0,1]$
5. Donner le tableau de variation de f
6. Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$
7. Montrer que $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2}$
8. En utilisant une intégration par partie montrer que $\int_1^e \ln(x) dx = 1$
9. Déduire l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$