

### Exercice 1 (5 pts)

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  les points

$A(3, 0, 2)$  et  $B(5, -1, 1)$  et  $C(0, 2, 3)$  et la sphère  $(S)$  d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 25 = 0$$

1. Montrer que le centre de la sphère  $(S)$  est le point  $\Omega(1, 0, 1)$  et que son rayon est  $R = 3\sqrt{3}$
2. Montrer que  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ , et que  $x + y + z - 5 = 0$  est une équation cartésienne Du plan  $(ABC)$
3. Vérifier que  $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3}$  puis montrer que le plan  $(ABC)$  coupe la sphère  $(S)$  en un cercle  $(\Gamma)$  de rayon  $r = 2\sqrt{6}$

Soit  $(\Delta)$  la droite passant par le point  $\Omega$  et est perpendiculaire au plan  $(ABC)$

4. Montrer que  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$  est une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$
5. Montrer que  $H(2, 1, 2)$  est le point d'intersection de la droite  $(\Delta)$  et le plan  $(ABC)$
6. Déduire le centre du cercle  $(\Gamma)$

### Exercice 2 (5 pts)

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexe  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - 6z + 25 = 0$

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectivement  $a = 3 - 4i$ ,  $b = 1 - i$  et  $c = -1 + 2i$

2. Calculer  $\frac{a-c}{b-c}$  et déduire que les points  $A, B$  et  $C$  sont alignés

On considère la translation  $T$  de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe  $-5 + i$

3. Vérifier que l'affixe du point  $D$  image du point  $C$  par la translation  $T$  est  $d = -6 + 3i$
4. Montrer que  $\frac{d-c}{b-c} = -1 - i$ , et que  $-\frac{3\pi}{4}$  est l'argument du nombre complexe  $-1 - i$

5. Déduire une mesure de l'angle orienté  $\widehat{(\vec{CB}, \vec{CD})}$

### Exercice 3 (10 pts)

#### Partie 1

Soit  $g$  la fonction numérique de variable  $x$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = 2 \ln(x) + 1 + \frac{3}{x^2}$

1. Montrer que  $g'(x) = \frac{2(x^2-3)}{x^3}$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$
2. Montrer que la fonction  $g$  est croissante sur l'intervalle  $[\sqrt{3}, +\infty[$  et décroissante sur l'intervalle  $]0, \sqrt{3}[$
3. Montrer que  $g(\sqrt{3}) = 2 + \ln 3$  et vérifier que  $g(\sqrt{3}) > 0$
4. Dédire que  $g(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$

## Partie 2

On considère la fonction  $f$  de variable réel  $x$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = (x^2 + 3) \ln(x)$

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité  $3cm$ )

5. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et interpréter géométriquement le résultat
6. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  puis montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  (On peut écrire  $\frac{f(x)}{x}$  sous la forme  $\left(\frac{x^2+3}{x}\right) \ln(x)$ )
7. Dédire que  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche parabolique au voisinage de  $+\infty$  à déterminer
8. Montrer que  $f'(x) = xg(x)$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ , puis déduire que  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$
9. Montrer que  $f''(x) = \frac{2x^2 \ln x + 3(x^2 - 1)}{x^2}$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$
10. Étudier le signe de  $3(x^2 - 1)$  et  $2x^2 \ln x$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ , puis déduire l'étude de la concavité de  $(\mathcal{C}_f)$
11. Montrer que  $y = 4x - 4$  est une équation cartésienne de la droite  $(\Gamma)$  tangente à  $(\mathcal{C}_f)$  au point d'abscisse 1
12. Tracer la droite  $(\Gamma)$  et la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
13. Montrer que  $x \mapsto \frac{x^3}{3} + 3x$  est une fonction primitive de la fonction  $x \mapsto x^2 + 3$  sur  $\mathbb{R}$
14. En utilisant une intégration par partie montrer que  $\int_1^e (x^2 + 3) \ln x dx = \frac{2}{9} (14 + e^3)$
15. Calculer en  $cm^2$  l'aire du domaine délimité par la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  et l'axe des abscisses et les deux droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$