

Exercice 1 (5 pts)

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points

$A(3, 0, 2)$ et $B(5, -1, 1)$ et $C(0, 2, 3)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 25 = 0$$

1. Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1, 0, 1)$ et que son rayon est $R = 3\sqrt{3}$
2. Montrer que $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, et que $x + y + z - 5 = 0$ est une équation cartésienne Du plan (ABC)
3. Vérifier que $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3}$ puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) en un cercle (Γ) de rayon $r = 2\sqrt{6}$

Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et est perpendiculaire au plan (ABC)

4. Montrer que $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)
5. Montrer que $H(2, 1, 2)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC)
6. Dédire le centre du cercle (Γ)

Exercice 2 (5 pts)

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexe \mathbb{C} l'équation $z^2 - 6z + 25 = 0$

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) les points A, B et C d'affixes respectivement $a = 3 - 4i$, $b = 1 - i$ et $c = -1 + 2i$

2. Calculer $\frac{a-c}{b-c}$ et déduire que les points A, B et C sont alignés

On considère la translation T de vecteur \vec{u} d'affixe $-5 + i$

3. Vérifier que l'affixe du point D image du point C par la translation T est $d = -6 + 3i$
4. Montrer que $\frac{d-c}{b-c} = -1 - i$, et que $-\frac{3\pi}{4}$ est l'argument du nombre complexe $-1 - i$

5. Dédire une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\vec{CB}, \vec{CD})}$

Exercice 3 (10 pts)

Partie 1

Soit g la fonction numérique de variable x définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 2 \ln(x) + 1 + \frac{3}{x^2}$

1. Montrer que $g'(x) = \frac{2(x^2-3)}{x^3}$ pour tout x de $]0, +\infty[$
2. Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[\sqrt{3}, +\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]0, \sqrt{3}[$
3. Montrer que $g(\sqrt{3}) = 2 + \ln 3$ et vérifier que $g(\sqrt{3}) > 0$
4. Dédire que $g(x) > 0$ pour tout x de $]0, +\infty[$

Partie 2

On considère la fonction f de variable réel x définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (x^2 + 3) \ln(x)$

Soit (\mathcal{C}_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité $3cm$)

5. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat
6. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (On peut écrire $\frac{f(x)}{x}$ sous la forme $\left(\frac{x^2+3}{x}\right) \ln(x)$)
7. Dédire que (\mathcal{C}_f) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ à déterminer
8. Montrer que $f'(x) = xg(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$, puis déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$
9. Montrer que $f''(x) = \frac{2x^2 \ln x + 3(x^2 - 1)}{x^2}$ pour tout x de $]0, +\infty[$
10. Étudier le signe de $3(x^2 - 1)$ et $2x^2 \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis déduire l'étude de la concavité de (\mathcal{C}_f)
11. Montrer que $y = 4x - 4$ est une équation cartésienne de la droite (Γ) tangente à (\mathcal{C}_f) au point d'abscisse 1
12. Tracer la droite (Γ) et la courbe (\mathcal{C}_f) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})
13. Montrer que $x \mapsto \frac{x^3}{3} + 3x$ est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto x^2 + 3$ sur \mathbb{R}
14. En utilisant une intégration par partie montrer que $\int_1^e (x^2 + 3) \ln x dx = \frac{2}{9} (14 + e^3)$
15. Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe (\mathcal{C}_f) et l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$