

Sommaire**I- Terminologie**

1-1/ Expérience aléatoire

1-2/ Univers

1-3/ Événement

1-4/ Évènement

II- Probabilité sur Ω l'univers d'une expérience aléatoire

2-1/ Probabilité d'un cas possible à être réalisé

2-2/ Probabilité sur un univers fini (un ensemble fini)

2-3/ Hypothèse d'équiprobabilité

III- Probabilité conditionnelle – Deux événements indépendants - Probabilités composées

3-1/ Probabilité conditionnelle - Deux événements indépendants

3-2/ Probabilité totale

IV- Expérience répétée plusieurs fois**V- Variables aléatoire – loi de probabilité – espérance mathématique – variance – écart-type**

5-1/ Variables aléatoire

5-2/ Loi de probabilité d'une variable aléatoire X

5-3/ Espérance mathématique - variance – écart-type d'une variable aléatoire X

VI- Loi binomiale ou distribution binomiale**VII- Exercices**

7-1/ Exercice 1

7-2/ Exercice 2

7-3/ Exercice 3

7-4/ Exercice 4

7-5/ Exercice 5

7-6/ Exercice 6

I- Terminologie

1-1/ Expérience aléatoire

Toute expérience dont ses résultats sont connus mais on ne pas donner le résultat de l'expérience avant de réaliser l'expérience ; on l'appelle expérience aléatoire.

Les résultats obtenues par cette expérience aléatoire on les note par ω_1 puis ω_2 puis ω_3 ω_n (en général ω_i avec $i \in \{1, 2, \dots, n\}$).

Exemple

1-2/ Événement

Chaque ω_i s'appelle une éventualité ou un événement élémentaire.

Par exemple, lorsqu'on obtient 1, on dit que $\omega_1 = 1$ est une éventualité ou cas possible.

1-3/ Univers

Les éventualités (ou les événements élémentaires) constituent un ensemble qui s'appelle univers.

Il est noté $\Omega(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$.

1-4/ Évènement

Toute partie A de Ω s'appelle événement.

Par exemple, $A = \{PP, FF\} \subset \Omega$, donc $A = \{PP, FF\}$ est un évènement.

On peut exprimer un évènement par une phrase : $A = \{PP, FF\}$ les deux lancements de dé donnent le même résultat

Si $A = \Omega$ alors l'évènement Ω s'appelle événement certain.

Si $A = \emptyset$ alors l'évènement \emptyset s'appelle événement impossible.

Si $A = \{\omega_i\}$ alors l'évènement $\{\omega_i\}$ s'appelle événement élémentaire.

Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont deux événements incompatibles .

Si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$ alors B s'appelle l'évènement contraire de A (et vis versa), on note $B = \overline{A}$ (de même $A = \overline{B}$).

L'évènement $A \cap B$ est l'ensemble constitué par des éventualités réalisées à la fois par les événements A et B .

L'évènement $A \cup B$ est l'ensemble constitués par des éventualités réalisées soit par l'évènement A ou par l'évènement B .

Les événements A_1 et A_2 et A_p est une partition de Ω s'ils sont disjoints deux à deux et $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p = \Omega$.

II- Probabilité sur Ω l'univers d'une expérience aléatoire

2-1/ Probabilité d'un cas possible à être réalisé

On lance dans l'air une pièce de monnaie 2 fois successives (si le 1er lancer donne P et le 2ème lancer donne F, cette éventualité (ou cas possible) sera notée PF).

Cette expérience est répétée 1000 fois, on obtient les résultats suivants :

Cas possibles (événement élémentaire)	FF	FP	PF	PP
Nombres de cas	240	260	270	230

- Quel est l'événement élémentaire qui a une grande chance d'être réalisé ?
- Quel est l'événement élémentaire qui a une faible chance d'être réalisé ?

2-2/ Probabilité sur un univers fini (un ensemble fini)

Définition

Soit $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.

Lorsqu'on répète une expérience aléatoire N fois dans les mêmes conditions, si n_i est le nombre de fois on a obtenu ω_i , Le nombre $\frac{n_i}{N}$ s'appelle la probabilité de l'événement élémentaire $\{\omega_i\}$, on note $p_i = p(\{\omega_i\}) = \frac{n_i}{N}$, et on a $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$.

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A, on note $p(A)$ (exemple : $\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_6\}$ donc

$$p(A) = p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_3\}) + p(\{\omega_6\}))$$

Exemple

Propriété

A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire.

$$\forall A \in \Omega ; 0 \leq p(A) \leq 1$$

$$p(\Omega) = 1$$

$$p(\emptyset) = 0$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

2-3/ Hypothèse d'équiprobabilité

Si dans une expérience aléatoire (dont l'univers est Ω), tous les événements élémentaires $A = \{\omega_i\}$ ont la même probabilité (c.à.d. $p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = \dots = p(\{\omega_n\})$), alors la probabilité d'un événement A de Ω est $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$.

Remarque

L'équiprobabilité est exprimé par les expressions suivants :

- Des boules indiscernables aux touché.
- On lance un dé (ou une pièce de monnaie) au hasard.

III- Probabilité conditionnelle – Deux événements indépendants - Probabilités composées

3-1/ Probabilité conditionnelle - Deux événements indépendants

Définition

A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire.

La probabilité de l'événement B sachons que l'événement A est réalisé est $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$, on la note par $p_A(B)$ ou par $p(B/A)$.

A et B sont deux événements indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ ou $p_A(B) = p(B)$.

$p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$, l'écriture $p(A \cap B) = p(A) \cdot p_A(B) = p(B) \cdot p_B(A)$ s'appelle la formule de probabilité composée.

Exemple

3-2/ Probabilité totale

Définition

A_1, A_2, A_3, \dots et A_n sont des événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire qui forment une partition de Ω .

A_1, A_2, A_3, \dots et A_n sont disjoints 2 à 2 et $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

La probabilité d'un événement B de Ω est :

$$p(B) = p(A_1)p_{A_1}(B) + p(A_2)p_{A_2}(B) + \dots + p(A_n)p_{A_n}(B)$$

IV- Expérience répétée plusieurs fois

Propriété

Soit $p = p(A)$ la probabilité d'un événement A d'un univers Ω d'une expérience aléatoire.

Soit l'événement C « l'événement A était réalisé k fois après avoir répété cette expérience aléatoire n fois dans les mêmes conditions de départ » avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

La probabilité de l'événement C est $p(C) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ et $p = p(A)$.

Exemple

V- Variables aléatoire – loi de probabilité – espérance mathématique – variance – écart-type

5-1/ Variables aléatoire

On va relier une relation entre l'ensemble des cas possible vers l'ensemble \mathbb{R} .

Cette relation notée X est appelée variable aléatoire définie de la manière suivante :

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$\omega_i \rightarrow X(\omega_i) = x_i$ tel que x_i est le nombre des numéros impaire pour chaque tirage ω_i .

Les nombres 0 et 1 et 2 sont appelés les valeurs de la variable aléatoire X , on note $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ et $x_3 = 2$, ces nombres constituent un ensemble noté $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ st appelé ensemble des valeurs de la variable aléatoire X , dans le cas général on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Tous les cas possibles ω_i (les événements élémentaires) qui sont reliés par x_i forment une partie de Ω , cette partie (c'est un événement) sera notée par $(X = x_i) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\}$.

L'écriture $p(X = x_i)$ signifie probabilité de l'événement $(X = x_i)$.

5-2/ Loi de probabilité d'une variable aléatoire X

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire.

L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Loi de probabilité de X : c'est de calculer toutes les probabilités $p(X = x_i)$ avec $x_i \in X(\Omega)$.

On a : $\sum_1^n p(X = x_i) = 1$

Exemple

5-3/ Espérance mathématique - variance – écart-type d'une variable aléatoire X

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire.

L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Le nombre $\sum_1^n x_i \cdot p(X = x_i)$ s'appelle l'espérance mathématique de la variable aléatoire X , on le note $E(X)$.

Le nombre $E(X^2) - [E(X)]^2 = \left[\sum_1^n (x_i)^2 \cdot p(X = x_i) \right] - [E(X)]^2$ s'appelle la variance de la variable aléatoire X , on la note $V(X)$. On a $V(X) \geq 0$.

Le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ s'appelle l'écart-type de la variable aléatoire X , on le note $\sigma(X)$.

Exemple

VI- Loi binomiale ou distribution binomiale

Définition et propriété

Soit p est la probabilité de l'événement A d'une expérience aléatoire (seulement une fois).

On répète cette expérience n fois (dans les mêmes conditions de départ).

On considère la variable aléatoire X définie de la manière suivante « le nombre de fois tel que l'évènement A est réalisé après la répétition de l'expérience de départ n fois »

L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$.

X est appelé loi binomiale (ou distribution) de paramètres n et p , on la note $X = B(n, p)$.

Exemple

VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

Une urne contient 10 boules : quatre boules rouges et six boules vertes (Les boules sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard, simultanément, deux boules de l'urne.

Soit A l'évènement : « Les deux boules tirées sont rouges ».

1. Montrer que $p(A) = \frac{2}{15}$

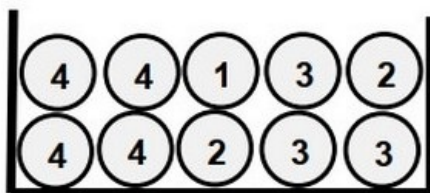
Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne après le tirage des deux boules.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs prises par X est $\{2, 3, 4\}$.

3. Montrer que $p(X = 3) = \frac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

7-2/ Exercice 2

Une urne contient 10 boules portant les nombres 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 (Les boules sont indiscernables au toucher) :



On considère l'expérience suivante : on tire au hasard , successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

Soit A l'évènement : "Obtenir deux boules portant deux nombres pairs".

1. Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$

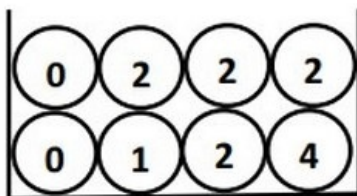
On répète l'expérience précédente trois fois de suite, en remettant dans l'urne les deux boules tirées après chaque expérience.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'évènement A est réalisé.

2. Montrer que $p(X = 1) = \frac{4}{9}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

7-3/ Exercice 3

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher portant chacune un nombre comme indiqué sur la figure suivante :



On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.

Soit A l'événement : « Parmi les trois boules tirées, aucune boule ne porte le nombre 0 », et B l'événement : « Le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égal à 8 »

1. Montrer que $p(A) = \frac{5}{14}$ et que $p(B) = \frac{1}{7}$

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées.

2. Montrer que $p(X = 16) = \frac{3}{28}$

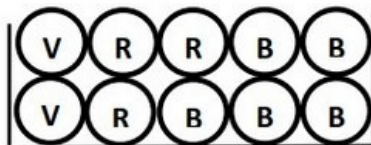
Le tableau suivant concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

x_i	0	4	8	16
$p(X = x_i)$				$\frac{3}{28}$

3. Compléter le tableau en justifiant chaque réponse.

7-4/ Exercice 4

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : Cinq boules blanches, trois boules rouges et deux boules vertes :



On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

Soit A l'événement : "Parmi les quatre boules tirées, une seule boule est verte", et B l'événement : "Parmi les quatre boules tirées, il y a exactement trois boules de même couleur".

1. Montrer que $p(A) = \frac{8}{15}$ et que $p(B) = \frac{19}{70}$

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.

2. Montrer que $p(X = 2) = \frac{2}{15}$

3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et montrer que l'espérance mathématique $E(X)$ est égale à $\frac{4}{5}$.

7-5/ Exercice 5

Une caisse contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges. (indiscernables au toucher).

On tire au hasard et simultanément trois boules de la caisse.

On considère les deux événements :

- A: Obtenir trois boules de même couleurs
- B: Obtenir trois boules de couleurs différentes deux à deux

1. Montrer que $P(A) = \frac{3}{44}$ et $P(B) = \frac{3}{11}$.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de couleur des boules tirées.

2. Déterminer les valeurs prises par X .
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X , et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

7-6/ Exercice 6

Une caisse contient dix boules : 5 boules blanches, 3 boules rouges et deux boules noires (indiscernables au toucher).

On tire au hasard et simultanément quatre boules de la caisse.

On considère les deux événements :

- A: Obtenir une seule boule rouge.
- B: Obtenir une boule blanche au moins.

1. Montrer que $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{41}{42}$.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges tirées.

2. Vérifier que les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 ; 3.
3. Montrer que $P(X = 0) = \frac{1}{6}$ et $P(X = 2) = \frac{3}{10}$.
4. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .