Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Séance 17 (Probabilités)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Terminologie

1-1/ Expérience aléatoire

Toute expérience dont ses résultats sont connus mais on ne pas donner le résultat de l'expérience avant de réaliser l'expérience ; on l'appelle expérience aléatoire.

Les résultats obtenues par cette expérience aléatoire on les note par ω_1 puis ω_2 puis ω_3 ...... ω_n (en général ω_i avec $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$).

Exemple

1-2/ Éventualité

Chaque ω_i s'appelle une éventualité ou un événement élémentaire.

Par exemple, lorsqu'on obtient 1, on dit que $\omega_1 = 1$ est une éventualité ou cas possible.

1-3/ Univers

Les éventualités (ou les événements élémentaires) constituent un ensemble qui s'appelle univers.

Il est noté $\Omega\,(\omega_1, \omega_2, \ldots., \omega_n)$.

1-4/ Évènement

Toute partie A de Ω s'appelle événement.

Par exemple, $A = \{PP, FF\} \subset \Omega$, donc $A = \{PP, FF\}$ est un évènement.

On peut exprimer un évènement par une phrase : $A = \{PP, FF\}$ les deux lancements de dé donnent le même résultat

Si $A = \Omega$ alors l'évènement Ω s'appelle événement certain.

Si $A = \emptyset$ alors l'évènement $\emptyset$ s'appelle événement impossible.

Si $A = \{\omega_i\}$ alors l'évènement $\{\omega_i\}$ s'appelle événement élémentaire.

Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont deux événements incompatibles .

Si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$ alors B s'appelle l'événement contraire de A (et vis versa), on note $B = \overline{A}$ (de même $A = \overline{B}$).

L'événement $A \cap B$ est l'ensemble constitué par des éventualités réalisées à la fois par les événements A et B.

L'événement $A \cup B$ est l'ensemble constitués par des éventualités réalisées soit par l'événement A ou par l'événement B.

Les événements A_1 et A_2 et ..... A_p est une partition de Ω s'ils sont disjoints deux à deux et $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p = \Omega$.

II- Probabilité sur Ω l'univers d'une expérience aléatoire

2-1/ Probabilité d'un cas possible à être réalisé

On lance dans l'air une pièce de monnaie 2 fois successives (si le 1er lancer donne P et le 2ème lancer donne F, cette éventualité (ou cas possible) sera notée PF.

Cette expérience est répétée 1000 fois, on obtient les résultats suivants :

Cas possibles (événement élémentaire)	FF	FP	PF	PP
Nombres de cas	240	260	270	230

- Quel est l'événement élémentaire qui a une grande chance d'être réalisé ?
- Quel est l'événement élémentaire qui a une faible chance d'être réalisé ?

2-2/ Probabilité sur un univers fini (un ensemble fini)

Définition

Soit $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots., \omega_n)$ l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.

Lorsqu'on répète une expérience aléatoire N fois dans les mêmes conditions, si n_i est le nombre de fois on a obtenu ω_i, Le nombre $\frac{n_i}{N}$ s'appelle la probabilité de l'événement élémentaire $\{\omega_i\}$, on note $p_i = p(\{\omega_i\}) = \frac{n_i}{N}$, et on a $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$.

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A, on note $p(A)$ (exemple : $\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_6\}$ donc
$p(A) = p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_3\}) + p(\{\omega_6\}))$

Exemple

Propriété

A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire.

$\forall A \in \Omega\,;\ 0 \leq p(A) \leq 1$
$p(\Omega) = 1$
$p(\emptyset) = 0$
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
$p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$

2-3/ Hypothèse d'équiprobabilité

Si dans une expérience aléatoire (dont l'univers est Ω), tous les événements élémentaires $A = \{\omega_i\}$ ont la même probabilité (c.à.d. $p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = \ldots = p(\{\omega_n\})$), alors la probabilité d'un évènement A de Ω est $p(A) = \frac{cardA}{card\Omega}$.

Remarque

L'équiprobabilité est exprimé par les expressions suivants :

- Des boules indiscernables aux touché.
- On lance un dé (ou une pièce de monnaie) au hasard.

III- Probabilité conditionnelle – Deux événements indépendants - Probabilités composées

3-1/ Probabilité conditionnelle - Deux événements indépendants

Définition

A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire.

La probabilité de l'événement B sachons que l'événement A est réalisé est $\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$, on la note par $p_A(B)$ ou par $p\left({}^{B}/_{A}\right)$.

A et B sont deux événements indépendants si $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$ ou $p_A(B) = p(B)$.

$p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$, l'écriture $p(A\cap B) = p(A).p_A(B) = p(B).p_B(A)$ s'appelle la formule de probabilité composée.

Exemple

3-2/ Probabilité totale

Définition

A_1, A_2, A_3,....et A_n sont des événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire qui forment une partition de Ω.

A_1, A_2, A_3,....et A_n sont disjoints 2 à 2 et $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots A_n = \Omega$.

La probabilité d'un événement B de Ω est :

$$p(B) = p(A_1)p_{A_1}(B) + p(A_2)p_{A_2}(B) + \ldots + p(A_n)p_{A_n}(B)$$

IV- Expérience répétée plusieurs fois

Propriété

Soit $p = p(A)$ la probabilité d'un événement A d'un univers Ω d'une expérience aléatoire.

Soit l'événement C « l'événement A était réalisé k fois après avoir répété cette expérience aléatoire n fois dans les mêmes conditions de départ » avec $k\in\{0,1,2,\ldots,n\}$.

La probabilité de l'événement C est $p(C) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ avec $k\in\{0,1,2,\ldots,n\}$ et $p = p(A)$.

Exemple

V- Variables aléatoire – loi de probabilité – espérance mathématique – variance – écart-type

5-1/ Variables aléatoire

On va relier une relation entre l'ensemble des cas possible vers l'ensemble $\mathbb{R}$.

Cette relation notée X est appelée variable aléatoire définie de la manière suivante :

$X\ :\ \Omega\to\mathbb{R}$

$\omega_i\to X(\omega_i) = x_i$ tel que x_i est le nombre des numéros impaire pour chaque tirage ω_i.

Les nombres 0 et 1 et 2 sont appelés les valeurs de la variable aléatoire X, on note $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ et $x_3 = 2$, ces nombres constituent un ensemble noté $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ st appelé ensemble des valeurs de la variable aléatoire X, dans le cas général on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Tous les cas possibles ω_i (les événements élémentaires) qui sont reliés par x_i forment une partie de Ω, cette partie (c'est un événement) sera notée par $(X = x_i) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\}$.

L'écriture $p(X = x_i)$ signifie probabilité de l'événement $(X = x_i)$.

5-2/ Loi de probabilité d'une variable aléatoire X

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire.

L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Loi de probabilité de X : c'est de calculer toutes les probabilités $p(X = x_i)$ avec $x_i \in X(\Omega)$.

On a : $\sum_1^n p(X = x_i) = 1$

Exemple

5-3/ Espérance mathématique - variance – écart-type d'une variable aléatoire X

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire.

L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Le nombre $\sum_1^n x_i . p(X = x_i)$ s'appelle l'espérance mathématique de la variable aléatoire X, on le note $E(X)$.

Le nombre $E(X^2) - [E(X)]^2 = \left[\sum_1^n (x_i)^2 . p(X = x_i)\right] - [E(X)]^2$ s'appelle la variance de la variable aléatoire X, on la note $V(X)$. On a $V(X) \geq 0$.

Le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ s'appelle l'écart-type de la variable aléatoire X, on le note $\sigma(X)$.

Exemple

VI- Loi binomiale ou distribution binomiale

Définition et propriété

Soit p est la probabilité de l'événement A d'une expérience aléatoire (seulement une fois).

On répète cette expérience n fois (dans les mêmes conditions de départ).

On considère la variable aléatoire X définie de la manière suivante « le nombre de fois tel que l'évènement A est réalisé après la répétition de l'expérience de départ n fois »

L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$.

X est appelé loi binomiale (ou distribution) de paramètres n et p, on la note $X = B(n, p)$.

Exemple

VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

Une urne contient 10 boules : quatre boules rouges et six boules vertes (Les boules sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard, simultanément, deux boules de l'urne.

Soit A l'évènement : « Les deux boules tirées sont rouges ».

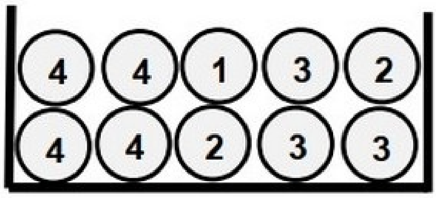
1. Montrer que $p\left(A\right) = \frac{2}{15}$

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne après le tirage des deux boules.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs prises par X est $\{2, 3, 4\}$.
3. Montrer que $p\left(X = 3\right) = \frac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

7-2/ Exercice 2

Une urne contient 10 boules portant les nombres 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 (Les boules sont indiscernables au toucher) :



On considère l'expérience suivante : on tire au hasard , successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

Soit A l'évènement : "Obtenir deux boules portant deux nombres pairs".

1. Montrer que $p\left(A\right) = \frac{1}{3}$

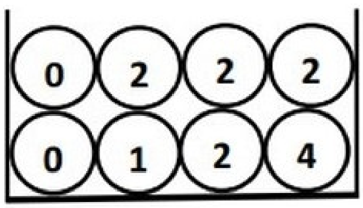
On répète l'expérience précédente trois fois de suite, en remettant dans l'urne les deux boules tirées après chaque expérience.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'évènement A est réalisé.

2. Montrer que $p\left(X = 1\right) = \frac{4}{9}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

7-3/ Exercice 3

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher portant chacune un nombre comme indiqué sur la figure suivante :



On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.

Soit A l'événement : « Parmi les trois boules tirées, aucune boule ne porte le nombre 0 », et B l'événement : « Le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égal à 8 »

1. Montrer que $p\left(A\right) = \frac{5}{14}$ et que $p\left(B\right) = \frac{1}{7}$

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées.

2. Montrer que $p\left(X = 16\right) = \frac{3}{28}$

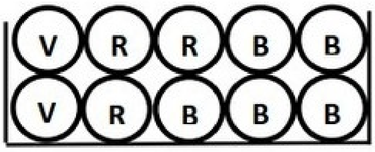
Le tableau suivant concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

x_i	0	4	8	16
$p(X = x_i)$				$\frac{3}{28}$

3. Compléter le tableau en justifiant chaque réponse.

7-4/ Exercice 4

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : Cinq boules blanches, trois boules rouges et deux boules vertes :



On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

Soit A l'événement : "Parmi les quatre boules tirées, une seule boule est verte", et B l'événement : "Parmi les quatre boules tirées, il y a exactement trois boules de même couleur".

1. Montrer que $p\left(A\right) = \frac{8}{15}$ et que $p\left(B\right) = \frac{19}{70}$

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.

2. Montrer que $p\left(X = 2\right) = \frac{2}{15}$
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et montrer que l'espérance mathématique $E\left(X\right)$ est égale à $\frac{4}{5}$.

7-5/ Exercice 5

Une caisse contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges. (indiscernables au toucher).

On tire au hasard et simultanément trois boules de la caisse.

On considère les deux événements :

- A: Obtenir trois boules de même couleurs
- B: Obtenir trois boules de couleurs différentes deux à deux

1. Montrer que $P\left(A\right) = \frac{3}{44}$ et $P\left(B\right) = \frac{3}{11}$.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de couleur des boules tirées.

2. Déterminer les valeurs prises par X.
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

7-6/ Exercice 6

Une caisse contient dix boules : 5 boules blanches, 3 boules rouges et deux boules noires (indiscernables au toucher).

On tire au hasard et simultanément quatre boules de la caisse.

On considère les deux événements :

- A: Obtenir une seule boule rouge.
- B: Obtenir une boule blanche au moins.

1. Montrer que $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{41}{42}$.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges tirées.

2. Vérifier que les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 ; 3.
3. Montrer que $P(X = 0) = \frac{1}{6}$ et $P(X = 2) = \frac{3}{10}$.
4. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.