Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Séance 16 (Dénombrement)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Ensemble fini – cardinal d'un ensemble fini

1-1/ Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et E est un ensemble qui contient n éléments.

On dit que E est un ensemble fini.

Le nombre n s'appelle le cardinal de E, on note $cardE = n$ avec $card\emptyset = 0$.

Exemple

1-2 Propriété

Soient E et F deux ensembles.

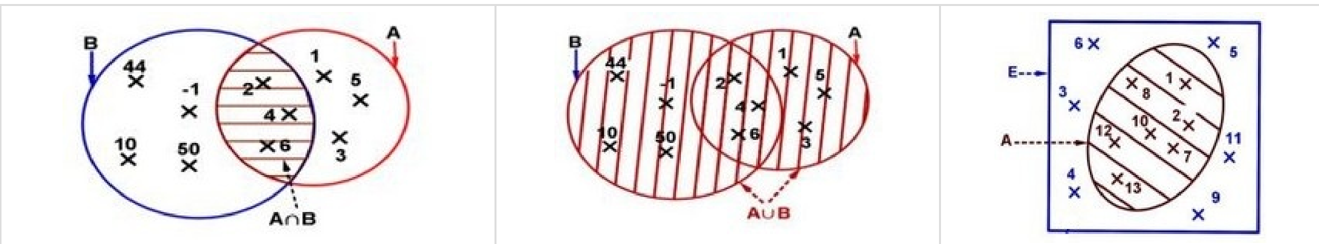
Si $E \cap F = \emptyset$ alors $cardE \cup F = cardE + cardF$.

En général : $cardE \cup F = cardE + cardF - cardE \cap F$.

$cardE \times F = cardE \times cardF$ ($E \neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$).

Si $A \subset E$ (A est une partie de E), on note l'ensemble suivant $\{x \in E / x \notin A\}$ par $\overline{A} = E \backslash A$.

On a : $card\overline{A} = cardE - cardA$.



II- Principe fondamental de dénombrement

2-1/ Activité

On veut déterminer tous les nombres constitués par deux chiffres différentes parmi les chiffres 3 et 4 et 5 et combien de nombres on a formé.

2-2/ Principe général de dénombrement (ou principe du produit)

On considère une expérience comporte p choix (étapes) avec ($p \in \{1, 2, 3. \ldots\}$).

Si le choix n°1 se fait avec n_1 manières différentes.

Si le choix n°2 se fait avec n_2 manières différentes.

………………………………………………………

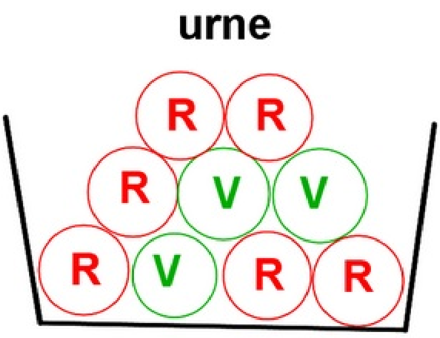
Si le choix n°p se fait avec n_p manières différentes.

Alors le nombre total des manières des p choix est $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots . \times n_p$.

III- Arrangement avec répétition

3-1/ Activité

Une urne contient 6 boules rouges et 3 boules vertes.



On tire 2 boules de l'urne l'une après l'autre et avec remise (c.à.d. la boule tirée doit être remise à l'urne avant de tirer la boule suivante).

On dit tirage avec remise.

Questions

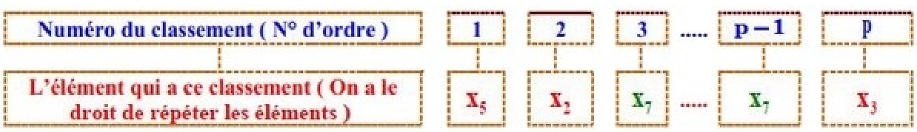
1. Quel le nombre des tirages possibles ?
2. Quel le nombre des tirages tel que la première boule tirée est rouge et la 2ème est verte ?

3-2/ Propriété

Le nombre des arrangements avec répétition de p éléments parmi n éléments est le nombre n^p.

Remarque

On représente une arrangement avec répétition de p éléments parmi les éléments suivants x_1 et x_2 et x_3 et ... x_n par :



Exemple

IV- Arrangement sans répétition de p éléments parmi n éléments

4-1/ Activité

Course de marathon entre 4 athlètes nommés de la manière suivante A et B et C et D.

À la fin de la course, deux prix sont distribués de la façon suivante :

50 000 dh pour le vainqueur de la course.

10 000 dh pour l'athlète qui a obtenue la 2ème place.

Sachant qu'à la fin de la course chaque place est occupé par un seul athlète.

Vocabulaire

chaque résultat obtenue à la fin de la course s'appelle arrangement sans répétition de 2 éléments parmi 4 éléments.

4-2/ Définition

Ordonner p éléments avec répétition parmi n éléments (répétition = avec possibilité de répéter les éléments) s'appelle arrangement avec répétition de p éléments parmi n éléments.

4-3/ Propriété

Le nombre des arrangements avec répétition de p éléments parmi n éléments est le nombre :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

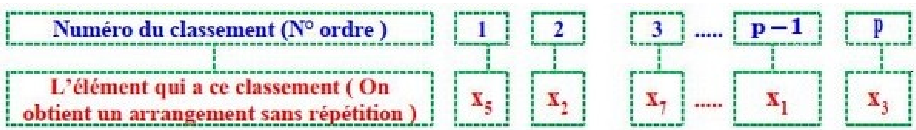
(avec $0 \leq p \leq n$ et $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$)

Le nombre suivant $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times .. \times n$ s'écrit $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times .. \times n$.

On lit : factoriel n, avec $0! = 1$ et $1! = 1$.

Remarque

On représente une arrangement sans répétition de p éléments parmi les éléments suivants x_1 et x_2 et x_3 et ... x_n par :



Exemple

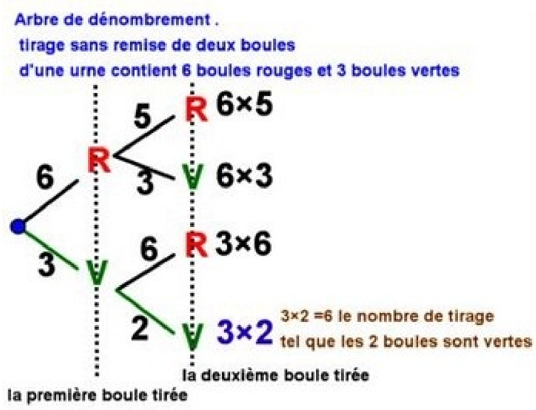
4-4/ Modèle d'une urne ou un sac contient (des boules ou des jetons ou des pions)

Une urne contient n boules lorsque on tire p boules l'une après l'autre et sans remise (c.à.d. la boule tiré doit être à l'extérieure de l'urne avant de tirer la boule suivante)

On dit tirage sans remise.

Une urne contient 6 boules rouges et 3 boules vertes.

1. Quel le nombre des tirages possibles ?
2. Quel le nombre des tirages tel que les deux boules sont vertes ?



V- Permutation de n éléments (arrangement sans répétition de n éléments parmi n éléments)

5-1/ Définition

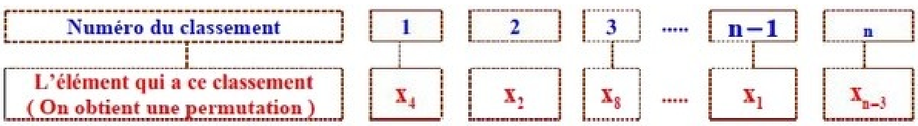
Ordonner n éléments sans répétition parmi n éléments (c.à.d. pas de possibilité de répéter les éléments) s'appelle permutation de n éléments.

5-2/ Propriété

Le nombre des permutation de n éléments est le nombre $A_n^n = n!$ $(n \in \mathbb{N})$.

Remarque

On représente une permutation de n éléments parmi les éléments x_1 et x_2 et x_3 et ... x_n par :



Exemple

VI- Combinaison de p éléments parmi n éléments

6-1/ Activité

Soit l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$, on donne une partie de E, par exemple $A = \{b, d\}$, $B = \{a, c, f\}$ et $H = \emptyset$.

La partie $A = \{b, d\}$ est appelée aussi combinaison de 2 parmi 5.

La partie $B = \{a, c, f\}$ est appelée aussi combinaison de 3 parmi 5.

La partie $H = \emptyset$ est appelée aussi combinaison de 0 parmi 5.

6-2/ Définition

E est un ensemble fini $(cardE = n)$.

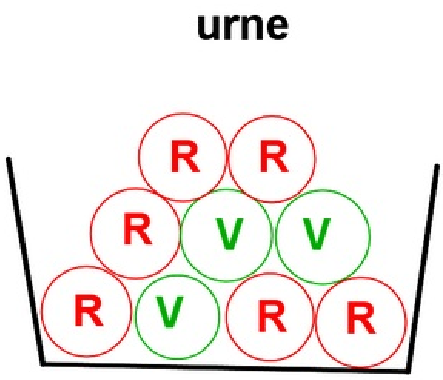
Toute partie A de E contient p éléments $(p \leq n)$ s'appelle combinaison de p éléments parmi n éléments.

6-3/ Propriété

Le nombre des combinaisons p éléments parmi n éléments est le nombre entier naturel :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)\times p!} = \frac{\overbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times..\times(n-p+1)}^{p}}{1\times2\times3\times...\times p}$$

avec $0 \leq p \leq n$ et $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.



VII- binôme de Newton

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ : \ (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$$

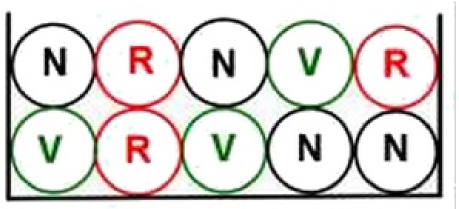
Exemple

IIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

Un sac contient dix boules indiscernables au touche dont :

- Trois boules rouges
- Trois boules vertes
- Quatre boules noires



On tire au hasard et simultanément 2 boules du sac.

1. Déterminer le nombre des tirages possibles (ou les cas possibles).
2. Déterminer le nombre des cas tel que les deux boules de même couleur.
3. Déterminer le nombre des cas tel que les deux boules de couleurs différentes.
4. Répondre aux même questions tel que :

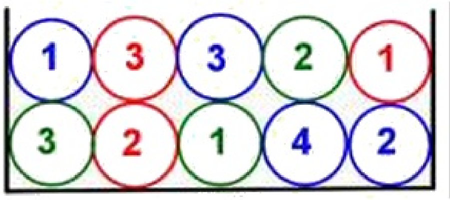
- a- On tire au hasard et successivement et sans remise deux boules du sac.

- b- On tire au hasard et successivement et avec remise deux boules du sac.

8-2/ Exercice 2

On dispose d'une urne qui contient dix jetons indiscernables au toucher :

- Quatre jetons bleus numérotés 1 ; 2 ; 3 ; 4
- Trois jetons rouges numérotés 1 ; 2 ; 3
- Trois jetons verts numérotées 1 ; 2 ; 3



On tire au hasard et simultanément deux jetons de l'urne.

1. Déterminer le nombre des tirages possibles (ou les cas possibles).
2. Déterminer le nombre des cas tel que les deux jetons de même couleur.
3. Déterminer le nombre des cas tel que les deux jetons de couleurs différentes.
4. Déterminer le nombre des cas tel que la somme des numéros des deux jetons est 5.

8-3/ Exercice 3

1. Combien de nombres de 3 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 ?
2. Parmi ceux-ci, combien sont inférieurs à 400 ?
3. Parmi ceux-ci, combien sont pairs ?
4. Parmi ceux-ci, combien sont multiples de 5 ?

8-4/ Exercice 4

On jette un dé cubique bien équilibré 2 fois successivement.

Les deux valeurs lues successivement sur la face supérieure du dé sont prises comme résultat.

1. Quelle le nombre des résultats peut-on envisager ?
2. Quelle le nombre des résultats tel que la somme des deux valeurs lue sur la face supérieure du dé est inférieure ou égale à 5 ?
3. Quelle le nombre des résultats tel que le premier lancement du dé est un nombre paire ?