Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Séance 15 (Géométrie dans l'espace 2 : Produit vectoriel)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Orientation de l'espace – trièdre – base et repère orientés

1-1/ Trièdre

$[OI)$ et $[OJ)$ et $[OK)$ trois demi-droites non coplanaires de l'espace $(\mathscr{E})$ constituent dans cet ordre un trièdre qu'on note (OI, OJ, OK)

Chaque demi-droite est appelée cote de trièdre.

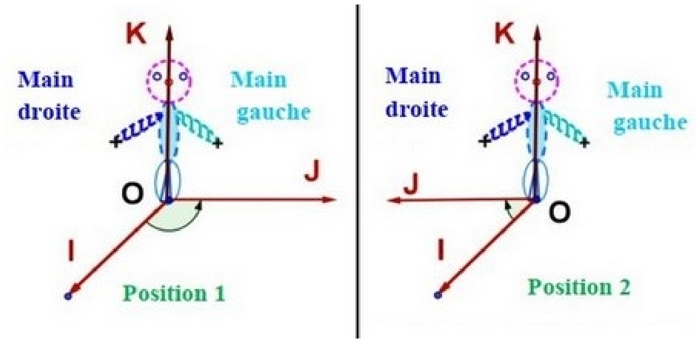
1-2/ Bonhomme d'Ampère

(OI, OJ, OK) est trièdre, on considère une personne virtuel (ou imaginaire) tel que :

ses pieds se trouvent en O debout dans le sens de $[OK)$.
il regarde le cote $[OI)$.

On s'intéresse de savoir si oui ou non la main gauche suit le cote $[OJ)$.

Cet personne est appelé Bonhomme d'Ampère, donc on a deux positions pour cet personne :



1-3/ Base et repère orientés

La position du bonhomme d'ampère tel que :

ses pieds se trouvent en O debout dans le sens de $[OK)$ et il regarde le cote $[OI)$ et la main gauche suit le cote $[OJ)$; le trièdre (OI, OJ, OK) est appelé trièdre directe ou positif, l'autre position le trièdre est appelé trièdre rétrograde ou négative.

On pose : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$, d'où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires .

le triplet $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base directe si le trièdre (OI, OJ, OK) est direct.

Le quadruplet $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un repère direct, dans ce cas on dit que l'espace est orienté une orientation directe ou positive.

II- Produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace orienté

2-1/ Définition géométrique du produit vectoriel

Définition

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$ orienté.

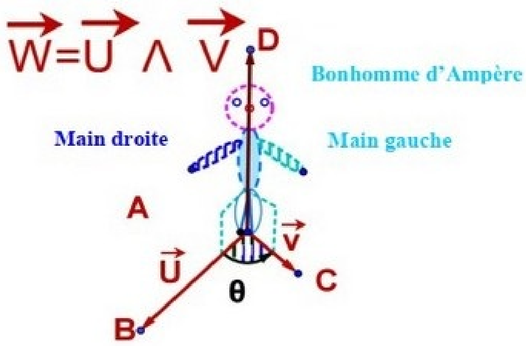
Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (dans cet ordre) est le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$, on note $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ qui vérifie :

1- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

2- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors :

- $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$

- $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right)$ est une base directe ou encore $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ est une base directe ou encore (AB, AC, AD) est un trièdre direct.
- La norme de $\overrightarrow{w}$ est $||\overrightarrow{w}|| = ||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \sin\theta$, θ est la mesure de l'angle géométrique BAC.



Conséquences

Soient $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$ orienté.

$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$; $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$; $\overrightarrow{0} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

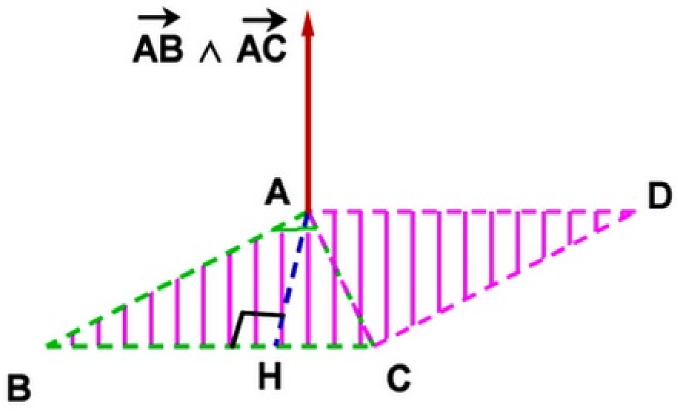
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls et orthogonaux, alors le triplet $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right)$ est une base orthogonale directe.

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls et orthogonaux et $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}|| = 1$, alors le triplet $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right)$ est une base orthonormée directe.

Le plan passant par le point A a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (c.à.d. $P\left(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$) alors le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est normal à ce plan d'où : $P\left(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = P\left(A, \overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right)$

$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$($\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires).

2-2/ Interprétation de la norme du produit vectoriel de deux vecteurs



La surface du triangle ABC est $S_{ABC} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$

La surface du parallélogramme $ABCD$ est $S_{ABCD} = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$

2-3/ Anti-symétrie et linéarité du produit vectoriel

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$ orienté, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'antisymétrie du produit vectoriel

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

Bilinéarité du produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$
$$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$$
$$\left(\alpha \vec{u}\right) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \left(\alpha \vec{v}\right) = \alpha \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)$$

III- Coordonnées de $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ dans l'espace rapporté à une base orthonormée directe

Propriété

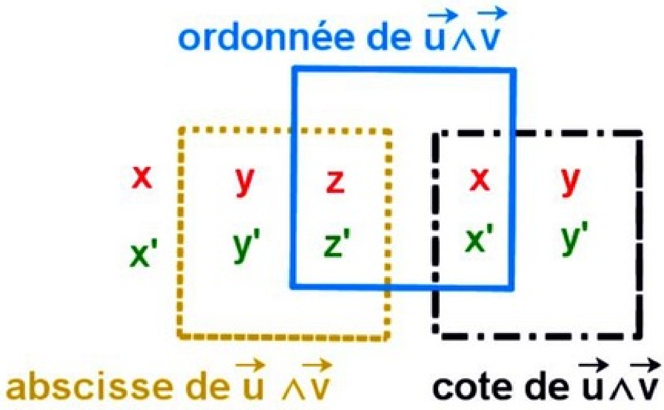
L'espace rapporté à une base orthonormée directe $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Soient $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} + z'\,\vec{k}$ deux vecteurs de l'espace.

On a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\right) \wedge \left(x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} + z'\,\vec{k}\right)$$
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \Delta_x \vec{i} - \Delta_y \vec{j} + \Delta_z \vec{k}$$

Technique



Exemple

IV- Distance d'un point à une droite de l'espace

Propriété

$D\left(a, \vec{u}\right)$ est une droite passant par le point A et est dirigé par un vecteur directeur $\vec{u}$ de l'espace.

M est un point de l'espace.

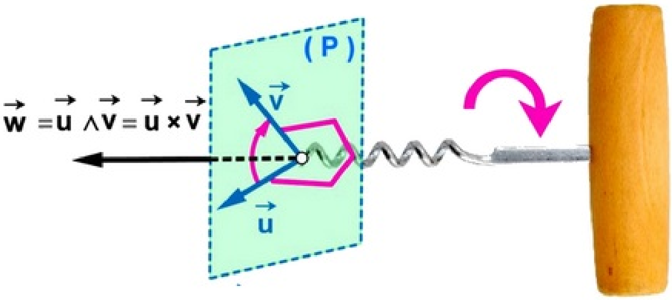
La distance du point A à la droite $D\left(a, \vec{u}\right)$ est :

$$d\left(M; D\left(a, \vec{u}\right)\right) = \frac{||\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}||}{||\vec{u}||}$$

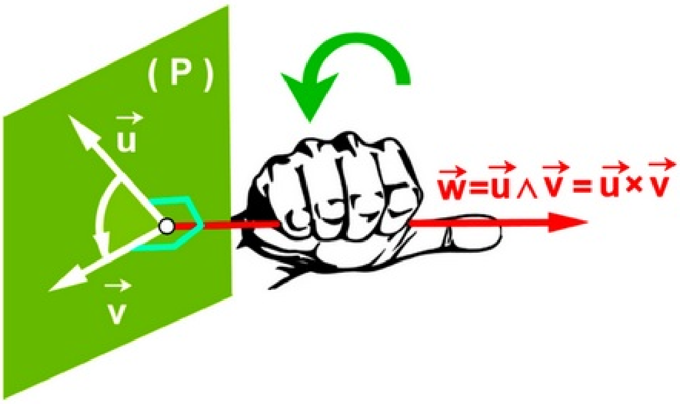
Exemple

V- Règles du produit vectoriel

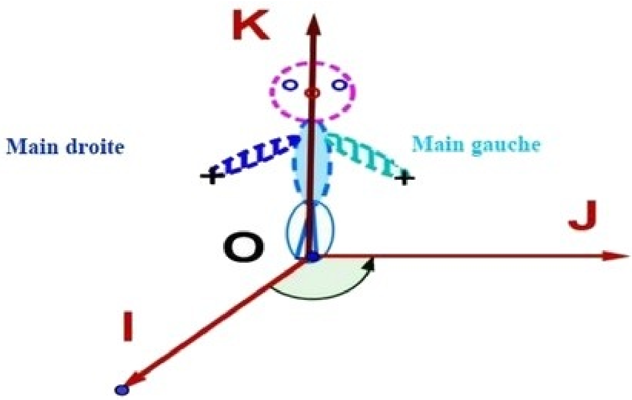
Règle du tire bouchon



Règle de la main droite



Bonhomme d'Ampère



VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(2,1,3)$, $B(3,1,1)$, $C(2,2,1)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$$

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$
2. En déduire que $2x+2y+z-9=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Montrer que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega\,(1,-1,0)$ et pour rayon 6.
4. Montrer que $d\,(\Omega,(ABC))=3$, et en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).
5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC).
6. Montrer que le point B est le centre du cercle (Γ).

6-2/ Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère le plan (P) passant par le point $A\,(0,1,1)$ et dont $\overrightarrow{u}\,(1,0,-1)$ est un vecteur normal et la sphère (S) de centre le point $\Omega\,(0,1,-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Montrer que $x-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (P).
2. Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et vérifier que $B\,(-1,1,0)$ est le point de contact.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale au plan (P).
4. Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) au point $C\,(1,1,0)$.
5. Montrer que $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\,\overrightarrow{k}$ et en déduire l'aire du triangle OCB.

6-3/ Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$ et le plan (P) d'équation $y-z=0$.

1. Montrer que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega\,(1,1,1)$ et pour rayon 2.
2. Calculer $d\,(\Omega,(P))$ et en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C).
3. Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).

Soit (Δ) la droite passant par le point $A\,(1,-2,2)$ et orthogonale au plan (P).

4. Montrer que $\overrightarrow{u}\,(0,1,-1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).
5. Montrer que $||\overrightarrow{\Omega A} \wedge \overrightarrow{u}|| = \sqrt{2}\,||\overrightarrow{u}||$ et en déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.
6. Déterminer les coordonnées de chaque point d'intersection de la droite (Δ) et de la sphère (S).

6-4/ Exercice 4

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(0,-2,-2)$, $B(1,-2,-4)$ et $C(-3,-1,2)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et en déduire que $2x+2y+z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

On considère la sphère (S) dont une équation est $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$.

2. Vérifier que la sphère (S) a pour centre $\Omega(1,0,1)$ et pour rayon $R=5$.
3. Vérifier que $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC).
4. Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) .
5. Vérifier que $d(\Omega,(ABC)) = 3$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4, dont on déterminera le centre.

6-5/ Exercice 5

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les points $A(-2,2,8)$, $B(6,6,0)$, $C(2,-1,0)$ et $D(0,1,-1)$.

Soit (S) l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

1. Déterminer les coordonnées $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$, et en déduire que $x+2y+2z=0$ est une équation cartésienne du plan (OCD).
2. Vérifier que (S) est la sphère de centre $\Omega(2,4,4)$ et de rayon $R=6$.
3. Calculer la distance de Ω au plan (OCD).
4. En déduire que le plan (OCD) est tangent à la sphère (S).
5. Vérifier que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$, et en déduire que O est le point contact de la sphère (S) et du plan (OCD).

6-6/ Exercice 6

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les points $A(-1,0,3)$, $B(3,3,0)$ et $C(7,1,-3)$.

Soit (S) la sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -5\left(3\vec{i} + 4\vec{k}\right)$, et en déduire que $3x+4z-9=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(3,\ 1,0)$ et de rayon 5.

Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

3. Montrer que $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

4. Montrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux deux points $E(6, 1, 4)$ et $F(0, 1, -4)$.