

Sommaire

## I- Orientation de l'espace – trièdre – base et repère orientés

1-1/ Trièdre

1-2/ Bonhomme d'Ampère

1-3/ Base et repère orientés

## II- Produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace orienté

2-1/ Définition géométrique du produit vectoriel

2-2/ Interprétation de la norme du produit vectoriel de deux vecteurs

2-3/ Anti-symétrie et linéarité du produit vectoriel

III- Coordonnées de  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  dans l'espace rapporté à une base orthonormée directe

## IV- Distance d'un point à une droite de l'espace

## V- Règles du produit vectoriel

## VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

6-5/ Exercice 5

6-6/ Exercice 6

---

  
I- Orientation de l'espace – trièdre – base et repère orientés

1-1/ Trièdre

$[OI]$  et  $[OJ]$  et  $[OK]$  trois demi-droites non coplanaires de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) constituent dans cet ordre un trièdre qu'on note  $(OI, OJ, OK)$

Chaque demi-droite est appelée cote de trièdre.

## 1-2/ Bonhomme d'Ampère

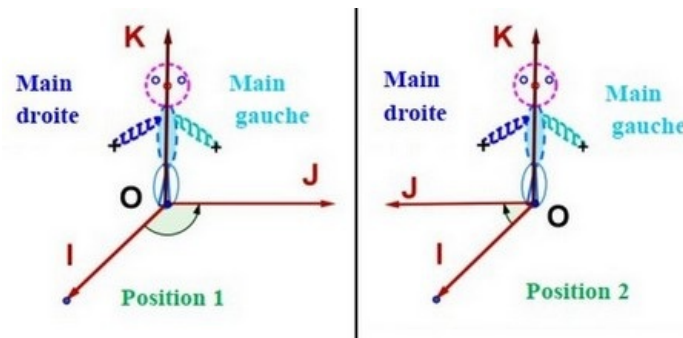
$(OI, OJ, OK)$  est trièdre, on considère une personne virtuelle (ou imaginaire) tel que :

ses pieds se trouvent en  $O$  debout dans le sens de  $[OK]$ .

il regarde le cote  $[OI]$ .

On s'intéresse de savoir si oui ou non la main gauche suit le cote  $[OJ]$ .

Cet personnage est appelé Bonhomme d'Ampère, donc on a deux positions pour cet personnage :



## 1-3/ Base et repère orientés

La position du bonhomme d'ampère tel que :

ses pieds se trouvent en  $O$  debout dans le sens de  $[OK]$  et il regarde le cote  $[OI]$  et la main gauche suit le cote  $[OJ]$  ; le trièdre  $(OI, OJ, OK)$  est appelé trièdre directe ou positif, l'autre position le trièdre est appelé trièdre rétrograde ou négative.

On pose :  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$  et  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$  et  $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ , d'où  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont non coplanaires .

le triplet  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base directe si le trièdre  $(OI, OJ, OK)$  est direct.

Le quadruplet  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère direct, dans ce cas on dit que l'espace est orienté une orientation directe ou positive.

## II- Produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace orienté

### 2-1/ Définition géométrique du produit vectoriel

#### Définition

Soient  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  deux vecteurs de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) orienté.

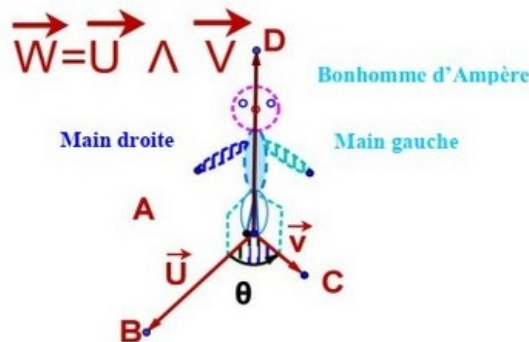
Le produit vectoriel de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  (dans cet ordre) est le vecteur  $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ , on note  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  qui vérifie :

1- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires alors  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .

2- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires alors :

- $\vec{w}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$

- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base directe ou encore  $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$  est une base directe ou encore  $(AB, AC, AD)$  est un trièdre direct.
- La norme de  $\vec{w}$  est  $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin \theta$ ,  $\theta$  est la mesure de l'angle géométrique  $BAC$ .



### Conséquences

Soient  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \vec{AC}$  deux vecteurs de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) orienté.

$$\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} ; \vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} ; \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

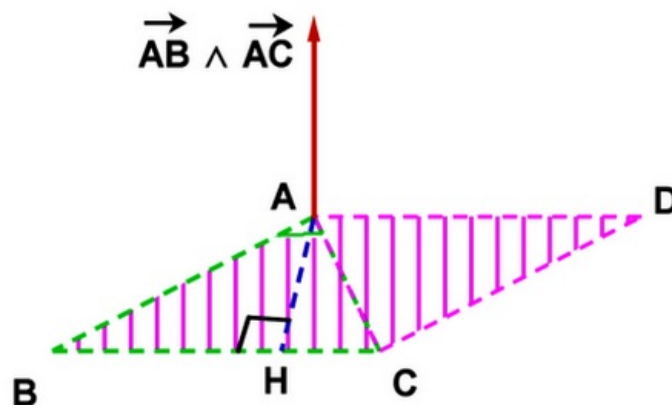
Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls et orthogonaux, alors le triplet  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base orthogonale directe.

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls et orthogonaux et  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ , alors le triplet  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base orthonormée directe.

Le plan passant par le point  $A$  a pour vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  (c.à.d.  $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ ) alors le vecteur  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  est normal à ce plan d'où :  $P(A, \vec{u}, \vec{v}) = P(A, \vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v})$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}).$$

### 2-2/ Interprétation de la norme du produit vectoriel de deux vecteurs



La surface du triangle  $ABC$  est  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

La surface du parallélogramme  $ABCD$  est  $S_{ABCD} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

### 2-3/ Anti-symétrie et linéarité du produit vectoriel

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) orienté, et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

#### L'antisymétrie du produit vectoriel

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

### Bilinéarité du produit vectoriel

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \\ (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} &= \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ (\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} &= \vec{u} \wedge (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})\end{aligned}$$

### III- Coordonnées de $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ dans l'espace rapporté à une base orthonormée directe

#### Propriété

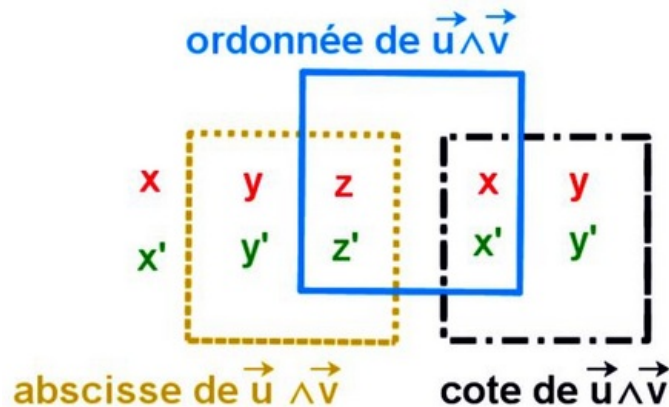
L'espace rapporté à une base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$  deux vecteurs de l'espace.

On a :

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k} \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= \Delta_x \vec{i} - \Delta_y \vec{j} + \Delta_z \vec{k}\end{aligned}$$

#### Technique



#### Exemple

### IV- Distance d'un point à une droite de l'espace

#### Propriété

$D(a, \vec{u})$  est une droite passant par le point  $A$  et est dirigé par un vecteur directeur  $\vec{u}$  de l'espace.

$M$  est un point de l'espace.

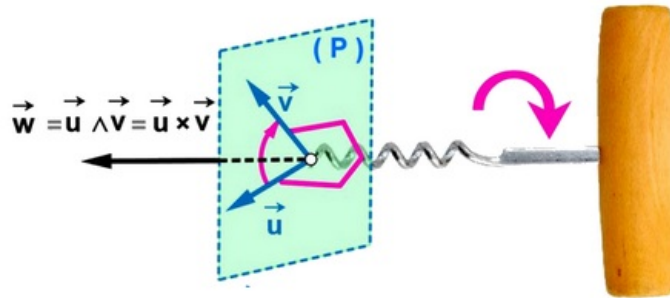
La distance du point  $A$  à la droite  $D(a, \vec{u})$  est :

$$d(M; D(a, \vec{u})) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

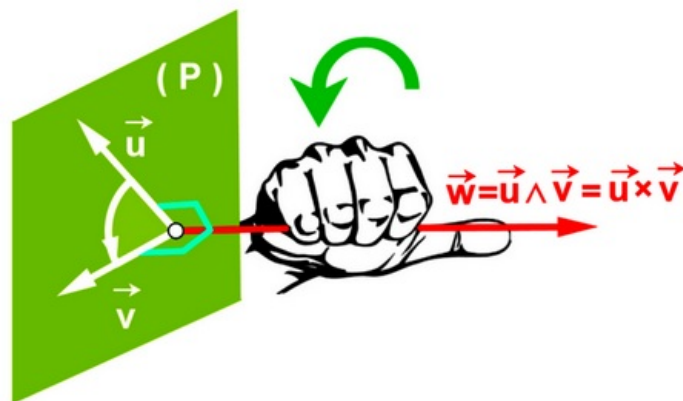
## Exemple

### V- Règles du produit vectoriel

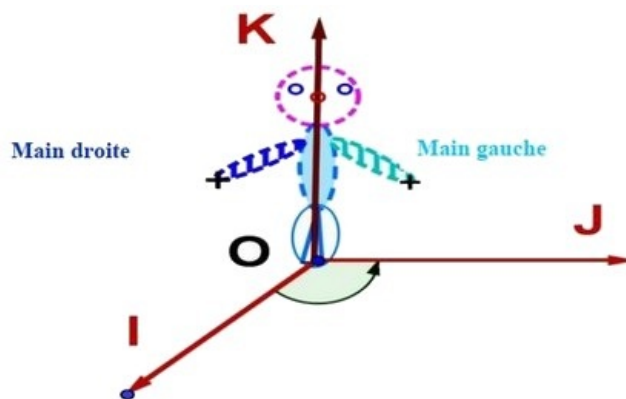
#### Règle du tire bouchon



#### Règle de la main droite



#### Bonhomme d'Ampère



## VI- Exercices

### 6-1/ Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(2, 1, 3)$ ,  $B(3, 1, 1)$ ,  $C(2, 2, 1)$  et la sphère  $(S)$  d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$$

1. Montrer que  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$
2. En déduire que  $2x + 2y + z - 9 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
3. Montrer que la sphère  $(S)$  a pour centre le point  $\Omega(1, -1, 0)$  et pour rayon 6.
4. Montrer que  $d(\Omega, (ABC)) = 3$ , et en déduire que le plan  $(ABC)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle  $(\Gamma)$ .
5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par le point  $\Omega$  et orthogonale au plan  $(ABC)$ .
6. Montrer que le point B est le centre du cercle  $(\Gamma)$ .

## 6-2/ Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le plan  $(P)$  passant par le point  $A(0, 1, 1)$  et dont  $\vec{u}(1, 0, -1)$  est un vecteur normal et la sphère  $(S)$  de centre le point  $\Omega(0, 1, -1)$  et de rayon  $\sqrt{2}$ .

1. Montrer que  $x - z + 1 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(P)$ .
2. Montrer que le plan  $(P)$  est tangent à la sphère  $(S)$  et vérifier que  $B(-1, 1, 0)$  est le point de contact.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par le point  $A$  et orthogonale au plan  $(P)$ .
4. Montrer que la droite  $(\Delta)$  est tangente à la sphère  $(S)$  au point  $C(1, 1, 0)$ .
5. Montrer que  $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{k}$  et en déduire l'aire du triangle  $OCB$ .

## 6-3/ Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère la sphère  $(S)$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$  et le plan  $(P)$  d'équation  $y - z = 0$ .

1. Montrer que la sphère  $(S)$  a pour centre le point  $\Omega(1, 1, 1)$  et pour rayon 2.
2. Calculer  $d(\Omega, (P))$  et en déduire que le plan  $(P)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle  $(C)$ .
3. Déterminer le centre et le rayon du cercle  $(C)$ .

Soit  $(\Delta)$  la droite passant par le point  $A(1, -2, 2)$  et orthogonale au plan  $(P)$ .

4. Montrer que  $\vec{u}(0, 1, -1)$  est un vecteur directeur de la droite  $(\Delta)$ .
5. Montrer que  $\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2} \|\vec{u}\|$  et en déduire que la droite  $(\Delta)$  coupe la sphère  $(S)$  en deux points.
6. Déterminer les coordonnées de chaque point d'intersection de la droite  $(\Delta)$  et de la sphère  $(S)$ .

## 6-4/ Exercice 4

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(0, -2, -2)$ ,  $B(1, -2, -4)$  et  $C(-3, -1, 2)$ .

1. Montrer que  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  et en déduire que  $2x + 2y + z + 6 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .

On considère la sphère  $(S)$  dont une équation est  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$ .

2. Vérifier que la sphère  $(S)$  a pour centre  $\Omega(1, 0, 1)$  et pour rayon  $R = 5$ .
3. Vérifier que  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ ;  $(t \in \mathbb{R})$  est une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par le point  $\Omega$  et orthogonale au plan  $(ABC)$ .
4. Déterminer les coordonnées de  $H$  point d'intersection de la droite  $(\Delta)$  et du plan  $(ABC)$ .
5. Vérifier que  $d(\Omega, (ABC)) = 3$ , puis montrer que le plan  $(ABC)$  coupe la sphère  $(S)$  selon un cercle de rayon 4, dont on déterminera le centre.

## 6-5/ Exercice 5

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(-2, 2, 8)$ ,  $B(6, 6, 0)$ ,  $C(2, -1, 0)$  et  $D(0, 1, -1)$ .

Soit  $(S)$  l'ensemble des points  $M$  vérifiant  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ .

1. Déterminer les coordonnées  $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$ , et en déduire que  $x + 2y + 2z = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(OCD)$ .
2. Vérifier que  $(S)$  est la sphère de centre  $\Omega(2, 4, 4)$  et de rayon  $R = 6$ .
3. Calculer la distance de  $\Omega$  au plan  $(OCD)$ .
4. En déduire que le plan  $(OCD)$  est tangent à la sphère  $(S)$ .
5. Vérifier que  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ , et en déduire que  $O$  est le point contact de la sphère  $(S)$  et du plan  $(OCD)$ .

## 6-6/ Exercice 6

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(-1, 0, 3)$ ,  $B(3, 3, 0)$  et  $C(7, 1, -3)$ .

Soit  $(S)$  la sphère d'équation :  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

1. Montrer que  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -5(3\vec{i} + 4\vec{k})$ , et en déduire que  $3x + 4z - 9 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
2. Montrer que  $(S)$  est la sphère de centre  $\Omega(3, 1, 0)$  et de rayon 5.

Soit  $(\Delta)$  la droite passant par  $\Omega$  et perpendiculaire au plan  $(ABC)$ .

3. Montrer que  $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$  est une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$ .
4. Montrer que la droite  $(\Delta)$  coupe la sphère  $(S)$  aux deux points  $E(6, 1, 4)$  et  $F(0, 1, -4)$ .