

Sommaire

I- Orientation de l'espace – trièdre – base et repère orientés

1-1/ Trièdre

1-2/ Bonhomme d'Ampère

1-3/ Base et repère orientés

II- Produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace orienté

2-1/ Définition géométrique du produit vectoriel

2-2/ Interprétation de la norme du produit vectoriel de deux vecteurs

2-3/ Anti-symétrie et linéarité du produit vectoriel

III- Coordonnées de $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ dans l'espace rapporté à une base orthonormée directe

IV- Distance d'un point à une droite de l'espace

V- Règles du produit vectoriel

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

6-5/ Exercice 5

6-6/ Exercice 6

I- Orientation de l'espace – trièdre – base et repère orientés

1-1/ Trièdre

$[OI]$ et $[OJ]$ et $[OK]$ trois demi-droites non coplanaires de l'espace (\mathcal{E}) constituent dans cet ordre un trièdre qu'on note (OI, OJ, OK)

Chaque demi-droite est appelée cote de trièdre.

1-2/ Bonhomme d'Ampère

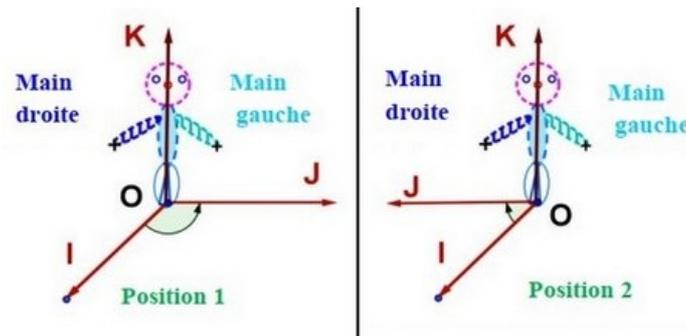
(OI, OJ, OK) est trièdre, on considère une personne virtuelle (ou imaginaire) tel que :

ses pieds se trouvent en O debout dans le sens de $[OK]$.

il regarde le cote $[OI]$.

On s'intéresse de savoir si oui ou non la main gauche suit le cote $[OJ]$.

Cet personnage est appelé Bonhomme d'Ampère, donc on a deux positions pour cet personnage :



1-3/ Base et repère orientés

La position du bonhomme d'ampère tel que :

ses pieds se trouvent en O debout dans le sens de $[OK]$ et il regarde le cote $[OI]$ et la main gauche suit le cote $[OJ]$; le trièdre (OI, OJ, OK) est appelé trièdre directe ou positif, l'autre position le trièdre est appelé trièdre rétrograde ou négative.

On pose : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$, d'où \vec{i} et \vec{j} et \vec{k} sont non coplanaires .

le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base directe si le trièdre (OI, OJ, OK) est direct.

Le quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère direct, dans ce cas on dit que l'espace est orienté une orientation directe ou positive.

II- Produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace orienté

2-1/ Définition géométrique du produit vectoriel

Définition

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de l'espace (\mathcal{E}) orienté.

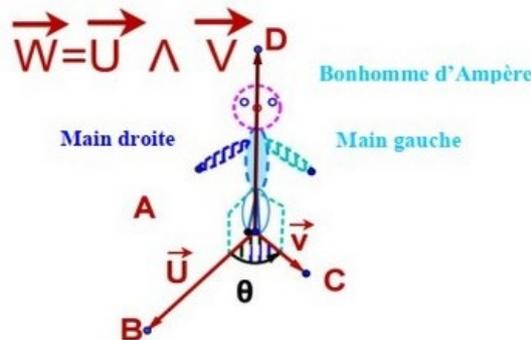
Le produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} (dans cet ordre) est le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$, on note $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ qui vérifie :

1- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires alors $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

2- Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires alors :

- \vec{w} est orthogonal à \vec{u} et \vec{v}

- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe ou encore $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ est une base directe ou encore (AB, AC, AD) est un trièdre direct.
- La norme de \vec{w} est $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin \theta$, θ est la mesure de l'angle géométrique BAC .



Conséquences

Soient $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$ deux vecteurs de l'espace (\mathcal{E}) orienté.

$$\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} ; \vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} ; \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

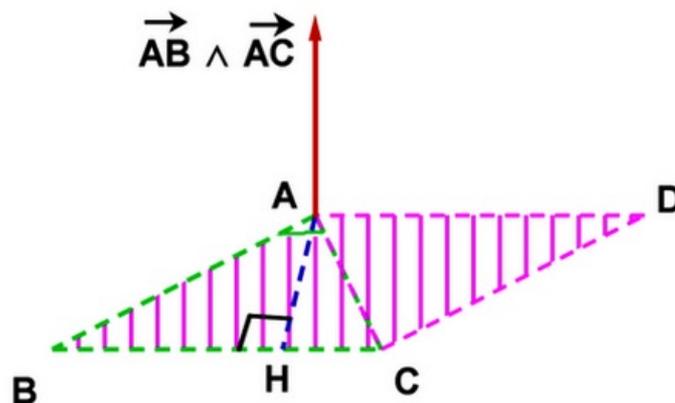
Si \vec{u} et \vec{v} sont non nuls et orthogonaux, alors le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthogonale directe.

Si \vec{u} et \vec{v} sont non nuls et orthogonaux et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, alors le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonormée directe.

Le plan passant par le point A a pour vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} (c.à.d. $P(A, \vec{u}, \vec{v})$) alors le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est normal à ce plan d'où : $P(A, \vec{u}, \vec{v}) = P(A, \vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v})$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}).$$

2-2/ Interprétation de la norme du produit vectoriel de deux vecteurs



La surface du triangle ABC est $S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

La surface du parallélogramme $ABCD$ est $S_{ABCD} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

2-3/ Anti-symétrie et linéarité du produit vectoriel

\vec{u} et \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace (\mathcal{E}) orienté, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'antisymétrie du produit vectoriel

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

Bilinéarité du produit vectoriel

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \\ (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} &= \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ (\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} &= \vec{u} \wedge (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})\end{aligned}$$

III- Coordonnées de $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ dans l'espace rapporté à une base orthonormée directe

Propriété

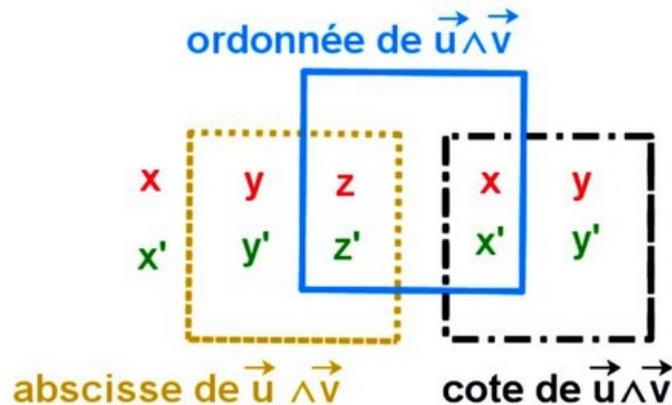
L'espace rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ deux vecteurs de l'espace.

On a :

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k} \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= \Delta_x \vec{i} - \Delta_y \vec{j} + \Delta_z \vec{k}\end{aligned}$$

Technique



Exemple

IV- Distance d'un point à une droite de l'espace

Propriété

$D(a, \vec{u})$ est une droite passant par le point A et est dirigé par un vecteur directeur \vec{u} de l'espace.

M est un point de l'espace.

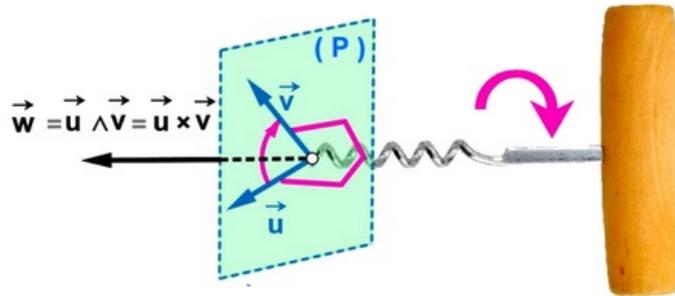
La distance du point A à la droite $D(a, \vec{u})$ est :

$$d(M; D(a, \vec{u})) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

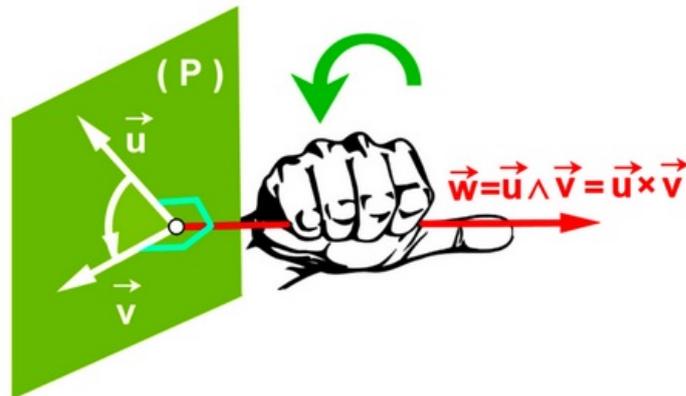
Exemple

V- Règles du produit vectoriel

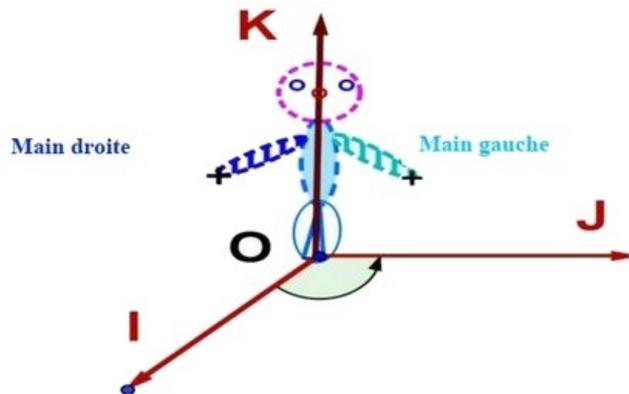
Règle du tire bouchon



Règle de la main droite



Bonhomme d'Ampère



VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(2, 1, 3)$, $B(3, 1, 1)$, $C(2, 2, 1)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$$

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$
2. En déduire que $2x + 2y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .
3. Montrer que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(1, -1, 0)$ et pour rayon 6.
4. Montrer que $d(\Omega, (ABC)) = 3$, et en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) .
5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC) .
6. Montrer que le point B est le centre du cercle (Γ) .

6-2/ Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan (P) passant par le point $A(0, 1, 1)$ et dont $\vec{u}(1, 0, -1)$ est un vecteur normal et la sphère (S) de centre le point $\Omega(0, 1, -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Montrer que $x - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P) .
2. Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et vérifier que $B(-1, 1, 0)$ est le point de contact.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale au plan (P) .
4. Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) au point $C(1, 1, 0)$.
5. Montrer que $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OCB .

6-3/ Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$ et le plan (P) d'équation $y - z = 0$.

1. Montrer que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(1, 1, 1)$ et pour rayon 2.
2. Calculer $d(\Omega, (P))$ et en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) .
3. Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) .

Soit (Δ) la droite passant par le point $A(1, -2, 2)$ et orthogonale au plan (P) .

4. Montrer que $\vec{u}(0, 1, -1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) .
5. Montrer que $\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2} \|\vec{u}\|$ et en déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.
6. Déterminer les coordonnées de chaque point d'intersection de la droite (Δ) et de la sphère (S) .

6-4/ Exercice 4

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, -2, -2)$, $B(1, -2, -4)$ et $C(-3, -1, 2)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et en déduire que $2x + 2y + z + 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

On considère la sphère (S) dont une équation est $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$.

2. Vérifier que la sphère (S) a pour centre $\Omega(1, 0, 1)$ et pour rayon $R = 5$.
3. Vérifier que $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC) .
4. Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) .
5. Vérifier que $d(\Omega, (ABC)) = 3$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4, dont on déterminera le centre.

6-5/ Exercice 5

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-2, 2, 8)$, $B(6, 6, 0)$, $C(2, -1, 0)$ et $D(0, 1, -1)$.

Soit (S) l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

1. Déterminer les coordonnées $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$, et en déduire que $x + 2y + 2z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OCD) .
2. Vérifier que (S) est la sphère de centre $\Omega(2, 4, 4)$ et de rayon $R = 6$.
3. Calculer la distance de Ω au plan (OCD) .
4. En déduire que le plan (OCD) est tangent à la sphère (S) .
5. Vérifier que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, et en déduire que O est le point contact de la sphère (S) et du plan (OCD) .

6-6/ Exercice 6

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-1, 0, 3)$, $B(3, 3, 0)$ et $C(7, 1, -3)$.

Soit (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -5(3\vec{i} + 4\vec{k})$, et en déduire que $3x + 4z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .
2. Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(3, 1, 0)$ et de rayon 5.

Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC) .

3. Montrer que $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) .
4. Montrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux deux points $E(6, 1, 4)$ et $F(0, 1, -4)$.