

Sommaire

## I- Produit scalaire dans l'espace

1-1/ Définition

1-2/ Remarques

1-3/ Propriétés

## II- Base et repère orthonormé

2-1/ Rappel

2-2/ Technique

2-3/ Définitions

III- Expression analytique de  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ IV- Ensemble des points  $M(x, y, z)$  tel que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$ 

## V- Plan déterminé par un point et un vecteur normal

5-1/ Vecteur normal à un plan

5-2/ Ensemble des points  $M(x, y, z)$  tel que  $ax + by + cz + d = 0$ 5-3/ Ensemble des points  $M(x, y, z)$  tel que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ 

## VI- Distance d'un point à un plan

6-1/ Définition

6-2/ Propriété

## VII- Parallélisme et orthogonalité des droites et des plans

7-1/ Parallélisme et orthogonalité de deux plans

7-2/ Parallélisme et orthogonalité d'une droite et un plan

## IIX- Étude analytique de la sphère

8-1/ Définition d'une sphère

8-2/ Équation cartésienne d'une sphère

8-3/ Équation cartésienne d'une sphère déterminée par un diamètre  $[AB]$

8-4/ L'ensemble des points  $M(x, y, z)$  tel que

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

8-5/ Positions relatives d'une sphère et un plan

8-6/ Positions relatives d'une sphère et une droite

## IX- Exercices

9-1/ Exercice 1

9-2/ Exercice 2

9-3/ Exercice 3

9-4/ Exercice 4

9-5/ Exercice 5

9-6/ Exercice 6

## I- Produit scalaire dans l'espace

### 1-1/ Définition

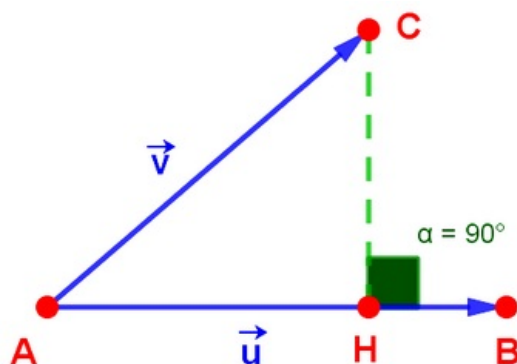
Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nul de l'espace  $(\mathcal{E})$

$A, B$  et  $C$  sont trois points de  $(\mathcal{E})$  tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

$H$  est la projection de  $C$  sur la droite  $(AB)$ .

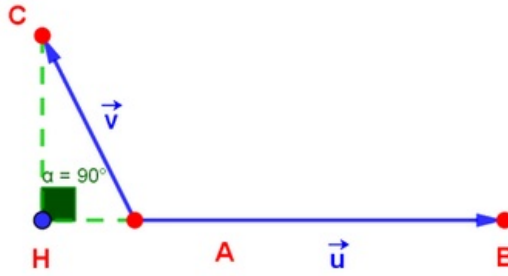
Le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est noté par  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  ou  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  tel que :

#### Cas 1



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AH$$

#### Cas 2



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \cdot AH$$

## 1-2/ Remarques

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$  est le carré scalaire de  $\vec{u}$  et est toujours positif.

$\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = AB$  est la norme du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , on note :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = AB$ .

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaire  $\Leftrightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

## Exemple

### 1-3/ Propriétés

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On a :

$$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

Symétrie du produit scalaire :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Positivité du produit scalaire :  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 \geq 0$

Non dégénère :  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Linéarité du produit scalaire :  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

## I- Base et repère orthonormé

### 2-1/ Rappel

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) rapporté à une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Le déterminant des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  dans cet ordre est le nombre :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (xy'z'' - xz'y'') + (-yx'z'' + yz'x'') + (zx'y'' - zy'x'')$$

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si et seulement si  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

## 2-2/ Technique

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' & x'' & x & x' \\ y & y' & y'' & y & y' \\ z & z' & z'' & z & z' \end{vmatrix} = (1) + (2) + (3) - (4) - (5) - (6)$$

## 2-3/ Définitions

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) équivaut à  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  ne sont pas coplanaires :

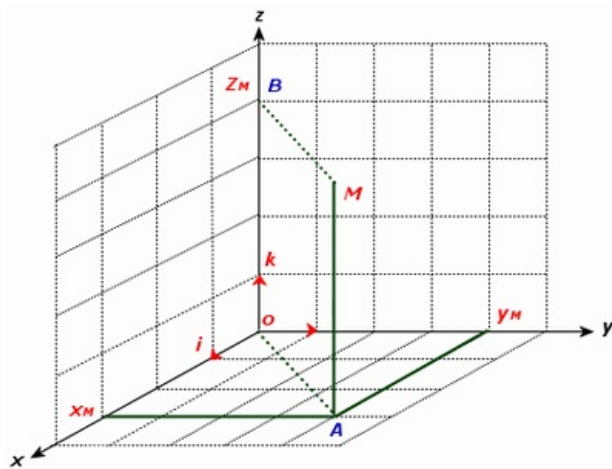
$$\left( \det(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \neq 0 \right)$$

Prenons un point  $O$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ )

Le quadruplé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est appelé repère de ( $\mathcal{E}$ )

Si  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$  et  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ , alors :

- La base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormée.
- Le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère orthonormé.



## III- Expression analytique de $\vec{u} \cdot \vec{v}$

### Propriété

Le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$

La norme du vecteur  $\vec{u}$  est :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

La distance  $AB$  est :  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ .

### Exemple

## IV- Ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$

### Propriété

$A(x_A, y_A, z_A)$  est un point et  $\vec{u}(a, b, c)$  est un vecteur non nul de l'espace  $(\mathcal{E})$  et  $k \in \mathbb{R}$ .

L'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace  $(\mathcal{E})$  tel que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$  est un plan  $(P)$  d'équation de la forme :  $ax + by + cz + d = 0$ .

### Exemple

## V- Plan déterminé par un point et un vecteur normal

### 5-1/ Vecteur normal à un plan

#### Définition

Tout vecteur  $\vec{n}$  non nul sa direction est perpendiculaire au plan  $(P)$  s'appelle vecteur normal au plan  $(P)$ .

#### Remarques

Si  $\vec{n}$  est normale au plan  $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ , alors  $\vec{n} \perp \vec{u}$  et  $\vec{n} \perp \vec{v}$ .

Si  $\vec{n}$  est normale au plan  $(P)$  et passe par  $A$  le plan  $(P)$  est noté par  $P(A, \vec{n})$ .

### Exemple

#### Définition

Tout vecteur  $\vec{n}$  non nul sa direction est perpendiculaire au plan  $(P)$  s'appelle vecteur normal au plan  $(P)$ .

#### Remarques

Si  $\vec{n}$  est normale au plan  $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ , alors  $\vec{n} \perp \vec{u}$  et  $\vec{n} \perp \vec{v}$ .

Si  $\vec{n}$  est normale au plan  $(P)$  et passe par  $A$  le plan  $(P)$  est noté par  $P(A, \vec{n})$ .

### Exemple

### 5-2/ Ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $ax + by + cz + d = 0$

#### Propriété

L'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace  $(\mathcal{E})$  qui vérifie  $ax + by + cz + d = 0$  avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  est un plan, et le vecteur non nul  $\vec{n}(a, b, c)$  est un vecteur normal à ce plan.

## Exemple

5-3/ Ensemble des points  $M(x, y, z)$  tel que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

### Propriété 1

$\vec{n}(a, b, c)$  est un vecteur non nul et  $A(x_A, y_A, z_A)$  est un point de l'espace ( $\mathcal{E}$ ).

L'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) qui vérifie  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  est le plan ( $P$ ) qui passe par  $A$  et le vecteur  $\vec{n}$  est un vecteur normal à ce plan (c.à.d.  $P(A, \vec{n})$ ).

Le plan ( $P$ ) a une équation cartésienne de la forme  $ax + by + cz + d = 0$  avec  $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$ .

## Exemple

### Propriété 2

Tout plan  $P(A, \vec{n}(a, b, c))$  a pour équation cartésienne de la forme  $ax + by + cz + d = 0$  la réciproque avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .

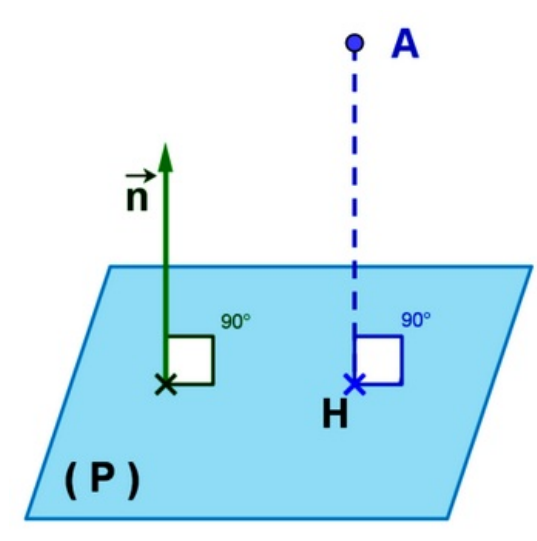
## Exemple

## VI- Distance d'un point à un plan

### 6-1/ Définition

( $P$ ) est un plan et  $A$  est un point de l'espace et  $H$  est la projection orthogonale de  $A$  sur le plan ( $P$ ).

La distance du point  $A$  au plan ( $P$ ) est  $AH$ , et on note  $AH = d(A, (P))$ .



### 6-2/ Propriété

( $P$ ) est un plan et  $A(x_A, y_A, z_A)$  est un point de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) tel que ( $P$ ) a pour équation  $ax + by + cz + d = 0$ .

La distance du point  $A$  au plan ( $P$ ) est :

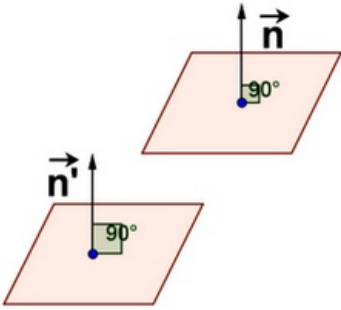
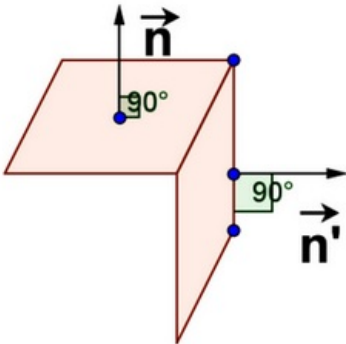
$$AH = d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

## VII- Parallélisme et orthogonalité des droites et des plans

### 7-1/ Parallélisme et orthogonalité de deux plans

#### Propriété

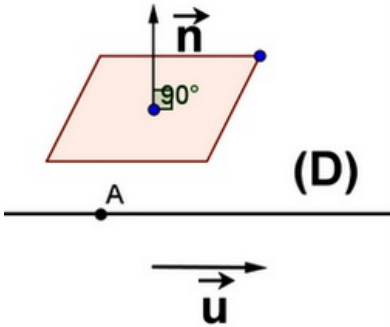
Soient  $(P_1) : ax + by + cz + d = 0$  et  $(P_2) : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ .

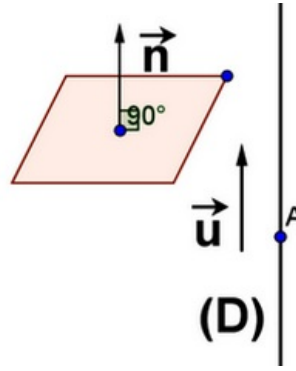
|   |   |
|---|---|
| $(P_2) \parallel (P_1) \Leftrightarrow \vec{n}' = \alpha \vec{n}$ |   |
| $(P_2) \perp (P_1) \Leftrightarrow \vec{n}' \cdot \vec{n} = 0$    |  |

#### Exemple

#### Propriété

Soient  $P(B, \vec{n})$  et  $D(A, \vec{u})$

|   |  |
|---|--|
| $(D) \parallel (P) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ |  |
| $(D) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u} = \alpha \vec{n}$      |  |



## Exemple

### IIIX- Étude analytique du sphère

#### 8-1/ Définition d'une sphère

$\Omega$  est un point donné de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) et  $R > 0$

L'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) tel que  $\Omega M = R$  s'appelle le sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$ .

On note  $(S)$  ou  $S(\Omega, R)$

#### 8-2/ Équation cartésienne d'une sphère

L'équation cartésienne de  $(S) = S(\Omega(a, b, c), R)$  est :

$$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \Omega M = R$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ avec } d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$$

#### 8-3/ Équation cartésienne d'une sphère déterminée par un diamètre $[AB]$

##### Définition

$\Omega$  est le milieu de  $[AB]$

$[AB]$  est un diamètre du sphère  $(S)$  donc  $A$  et  $B$  appartiennent à  $(S)$

On dit la sphère de diamètre  $[AB]$  on note  $(S)$  ou  $S_{[AB]}$ .

##### Propriété

L'équation cartésienne de  $S_{[AB]}$  est :  $M(x, y, z) \in S_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

$$\text{ou bien } (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

#### 8-4/ L'ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

On pose  $A = a^2 + b^2 + c^2 - 4d$

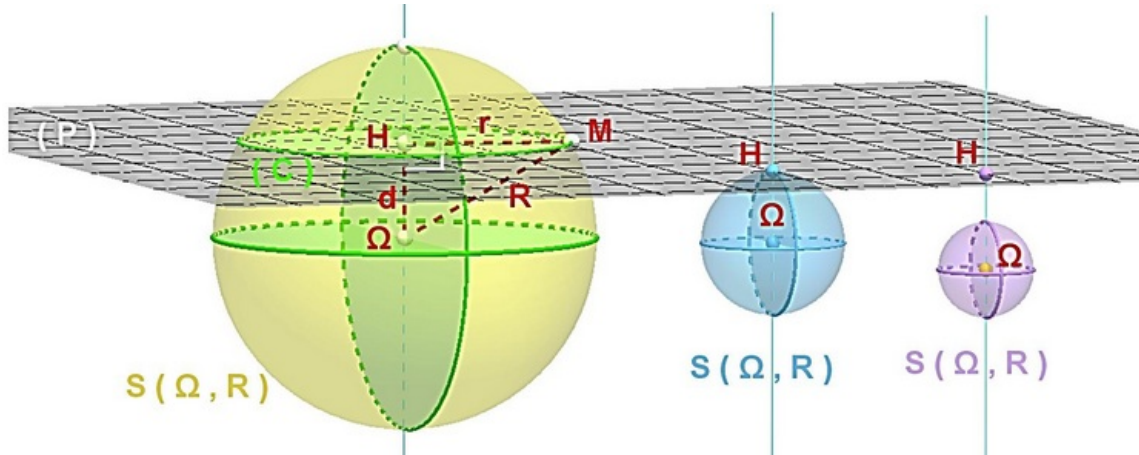


L'ensemble des points  $M(x, y, z)$  tel que  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$  est :

- $(E) = \emptyset$  si  $A < 0$
- $(E) = \left\{ \Omega \left( -\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right) \right\}$  si  $A = 0$
- La sphère  $(E) = S \left( \Omega \left( -\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right), R = \frac{\sqrt{A}}{2} \right)$  si  $A > 0$

## III- Étude analytique de la sphère

### 8-5/ Positions relatives d'une sphère et un plan



**Cas 1 :**  $d = \Omega H > R$

$$(P) \cap (S) = \emptyset$$

**Cas 2 :**  $d = \Omega H = R$

$$(P) \cap (S) = \{H\}; (P) \text{ et } (S) \text{ sont tangents en } H \text{ avec } (H\Omega) \perp (P)$$

**Cas 3 :**  $d = \Omega H < R$

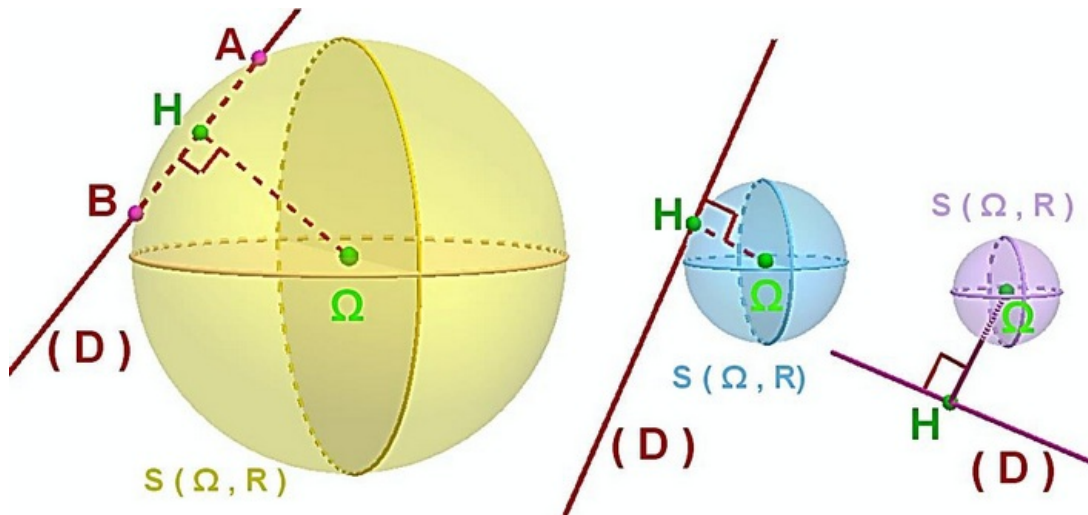
$$(P) \cap (S) = (C); (P) \text{ coupe } (S) \text{ suivant le cercle de centre } H \text{ et de rayon } r = R_c = \sqrt{R^2 - d^2}$$

### Équation du plan tangent à une sphère

Par un point  $A$  quelconque d'une sphère  $(S)$  il existe un et un seul plan  $(Q)$  tangente au sphère  $(S)$  au point  $A$ .

$$\text{L'équation de } (Q) \text{ est : } M \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$$

### 8-6/ Positions relatives d'une sphère et une droite



**Cas 1 :  $d = \Omega H > R$**

$$(D) \cap (S) = \emptyset$$

**Cas 2 :  $d = \Omega H = R$**

$(D) \cap (S) = \{H\}$  ;  $(D)$  et  $(S)$  sont tangents en  $H$  avec  $(H\Omega) \perp (D)$

**Cas 3 :  $d = \Omega H < R$**

$(D)$  coupe  $(S)$  en deux points  $A$  et  $B$  (Deux points mais pas le segment  $[AB]$ )

## IX- Exercices

### 9-1/ Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(2, 1, 3)$ ,  $B(3, 1, 1)$ ,  $C(2, 2, 1)$  et la sphère  $(S)$  d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$$

1. Montrer que  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$
2. En déduire que  $2x + 2y + z - 9 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
3. Montrer que la sphère  $(S)$  a pour centre le point  $\Omega(1, -1, 0)$  et pour rayon 6.
4. Montrer que  $d(\Omega, (ABC)) = 3$ , et en déduire que le plan  $(ABC)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle  $(\Gamma)$ .
5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par le point  $\Omega$  et orthogonale au plan  $(ABC)$ .
6. Montrer que le point B est le centre du cercle  $(\Gamma)$ .

### 9-2/ Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le plan  $(P)$  passant par le point  $A(0, 1, 1)$  et dont  $\vec{u}(1, 0, -1)$  est un vecteur normal et la sphère  $(S)$  de centre le point  $\Omega(0, 1, -1)$  et de rayon  $\sqrt{2}$ .

1. Montrer que  $x - z + 1 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(P)$ .
2. Montrer que le plan  $(P)$  est tangent à la sphère  $(S)$  et vérifier que  $B(-1, 1, 0)$  est le point de contact.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par le point  $A$  et orthogonale au plan  $(P)$ .
4. Montrer que la droite  $(\Delta)$  est tangente à la sphère  $(S)$  au point  $C(1, 1, 0)$ .
5. Montrer que  $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{k}$  et en déduire l'aire du triangle  $OCB$ .

### 9-3/ Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère la sphère  $(S)$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$  et le plan  $(P)$  d'équation  $y - z = 0$ .

1. Montrer que la sphère  $(S)$  a pour centre le point  $\Omega(1, 1, 1)$  et pour rayon  $2$ .
2. Calculer  $d(\Omega, (P))$  et en déduire que le plan  $(P)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle  $(C)$ .
3. Déterminer le centre et le rayon du cercle  $(C)$ .

Soit  $(\Delta)$  la droite passant par le point  $A(1, -2, 2)$  et orthogonale au plan  $(P)$ .

4. Montrer que  $\vec{u}(0, 1, -1)$  est un vecteur directeur de la droite  $(\Delta)$ .
5. Montrer que  $\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2} \|\vec{u}\|$  et en déduire que la droite  $(\Delta)$  coupe la sphère  $(S)$  en deux points.
6. Déterminer les coordonnées de chaque point d'intersection de la droite  $(\Delta)$  et de la sphère  $(S)$ .

### 9-4/ Exercice 4

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(0, -2, -2)$ ,  $B(1, -2, -4)$  et  $C(-3, -1, 2)$ .

1. Montrer que  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  et en déduire que  $2x + 2y + z + 6 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .

On considère la sphère  $(S)$  dont une équation est  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$ .

2. Vérifier que la sphère  $(S)$  a pour centre  $\Omega(1, 0, 1)$  et pour rayon  $R = 5$ .
3. Vérifier que  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$  est une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par le point  $\Omega$  et orthogonale au plan  $(ABC)$ .
4. Déterminer les coordonnées de  $H$  point d'intersection de la droite  $(\Delta)$  et du plan  $(ABC)$ .
5. Vérifier que  $d(\Omega, (ABC)) = 3$ , puis montrer que le plan  $(ABC)$  coupe la sphère  $(S)$  selon un cercle de rayon  $4$ , dont on déterminera le centre.

### 9-5/ Exercice 5

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le plan  $(P)$  d'équation  $x + 2y - z - 1 = 0$ .

1. Les points  $A(1; 1; 2)$  et  $B(2; 1; 1)$  appartiennent-ils au plan  $(P)$  ?
2. Calculer la distance  $AB$  puis les distances de ces deux points  $A$  et  $B$  au plan  $(P)$ .
3. Le point  $A$  est-il le projeté orthogonal de  $B$  sur le plan  $(P)$  ?

### 9-6/ Exercice 6

On considère les plans d'équations respectives  $(P) x - y + z = 0$  et  $(Q) 2x + 3y + z - 6 = 0$ , et la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega(1; 2; 4)$  et tangente au plan  $(P)$ .

Soit la droite  $(\Delta)$  qui passe par  $\Omega$  et perpendiculaire au plan  $(Q)$ .

1. Montrer que les plans  $(P)$  et  $(Q)$  sont orthogonaux.
2. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère  $(S)$ .
3. Déterminer le point de tangence de  $(P)$  et  $(S)$ .
4. Déterminer le point d'intersection de  $(\Delta)$  et  $(Q)$ .
5. Montrer que le plan  $(Q)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.