Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Séance 14 (Géométrie dans l'espace 1 : Produit scalaire)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Produit scalaire dans l'espace

1-1/ Définition

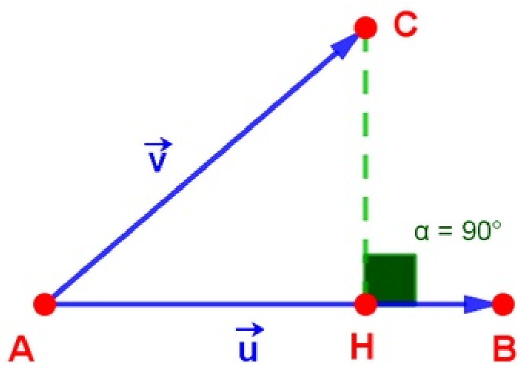
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul de l'espace $(\mathscr{E})$

A, B et C sont trois points de $(\mathscr{E})$ tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

H est la projection de C sur la droite (AB).

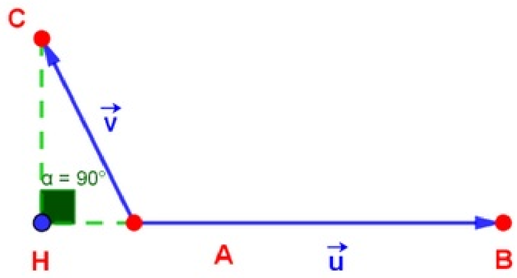
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté par $\vec{u}.\vec{v}$ ou $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ tel que :

Cas 1



$$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AH$$

Cas 2



$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\,\overrightarrow{AC} = -AB.\,AH$$

1-2/ Remarques

$\vec{u}\,.\,\vec{u} = \vec{u}^{\,2}$ est le carré scalaire de $\vec{u}$ et est toujours positif.

$\sqrt{\vec{u}\,.\,\vec{u}} = AB$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on note : $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}\,.\,\vec{u}} = AB$.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$.

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \overrightarrow{||u||} \times ||\vec{v}|| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,,\,\vec{v}}\right)$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire $\Leftrightarrow \left|\vec{u}\,.\,\vec{v}\right| = \overrightarrow{||u||} \times ||\vec{v}||$

Exemple

1-3/ Propriétés

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a :

$\vec{u}^{\,2} = ||\vec{u}||^2$

Symétrie du produit scalaire : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$

Positivité du produit scalaire : $\vec{u}\,.\,\vec{u} = \vec{u}^{\,2} \geq 0$

Non dégénère : $\vec{u}\,.\,\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Linéarité du produit scalaire : $\vec{u}\,.\left(\vec{v} + \vec{w}\right) =.\,\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$

$\left(\vec{v} + \vec{w}\right).\,\vec{u} = \vec{v}\,.\,\vec{u} + \vec{w}\,.\,\vec{u}$

$\vec{u}\,.\left(\alpha\,\vec{v}\right) = \left(\alpha\,\vec{u}\right).\,\vec{v} = \alpha\left(\vec{u}\,.\,\vec{v}\right)$

$\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\,\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$

$\left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^{\,2} - 2\,\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$

$\left(\vec{u} + \vec{v}\right)\left(\vec{u} - \vec{v}\right) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$

I- Base et repère orthonormé

2-1/ Rappel

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$ rapporté à une base $\left(\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$

Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans cet ordre est le nombre :

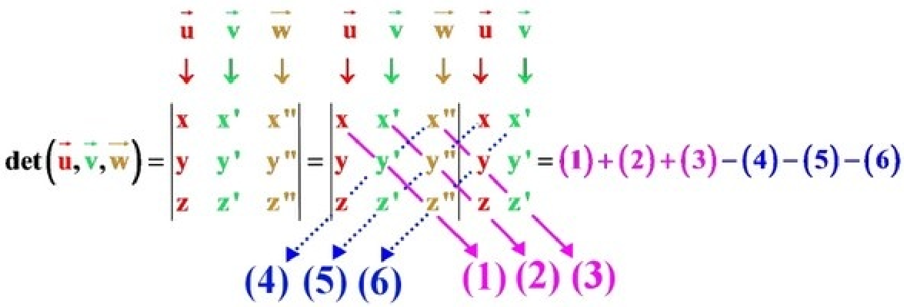
$$det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

$$det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)=x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

$$det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)=(xy'z''-xz'y'')+(-yx'z''+yz'x'')+(zx'y''-zy'x'')$$

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si $det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)=0$

2-2/ Technique



2-3/ Définitions

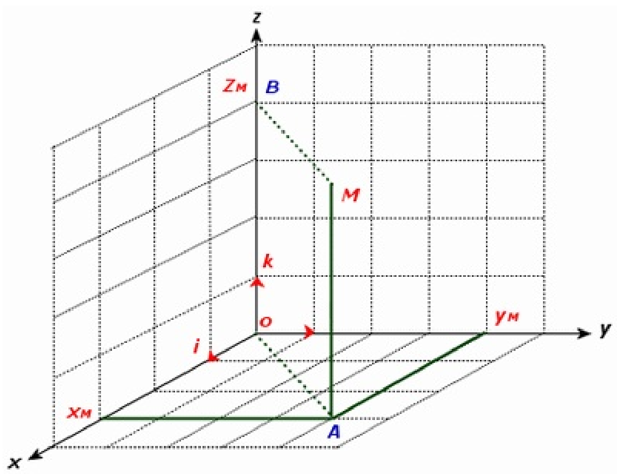
$\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ est une base de l'espace $(\mathscr{E})$ équivaut à $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ ne sont pas coplanaires : $\left(det\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)\neq 0\right)$

Prenons un point O de l'espace $(\mathscr{E})$

Le quadruplé $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ est appelé repère de $(\mathscr{E})$

Si $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j}=\overrightarrow{j}.\overrightarrow{k}=\overrightarrow{k}.\overrightarrow{i}=0$ et $||\overrightarrow{i}||=||\overrightarrow{j}||=||\overrightarrow{k}||=1$, alors :

- La base $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ est une base orthonormée.
- Le repère $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ est un repère orthonormé.



III- Expression analytique de $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$

Propriété

Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est : $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$

La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ est : $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

La distance AB est : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Exemple

IV- Ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que $\overrightarrow{AM}.\,\overrightarrow{u} = k$

Propriété

$A\,(x_A, y_a, z_A)$ est un point et $\overrightarrow{u}\,(a,b,c)$ est un vecteur non nul de l'espace $(\mathscr{E})$ et $k \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des points $M\,(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $\overrightarrow{AM}.\,\overrightarrow{u} = k$ est un plan (P) d'équation de la forme :$ax + by + cz + d = 0$.

Exemple

V- Plan déterminé par un point et un vecteur normal

5-1/ Vecteur normal à un plan

Définition

Tout vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul sa direction est perpendiculaire au plan (P) s'appelle vecteur normal au plan (P).

Remarques

Si $\overrightarrow{n}$ est normale au plan $P\Big(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\Big)$, alors $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{v}$.

Si $\overrightarrow{n}$ est normale au plan (P) et passe par A le plan (P) est noté par $P\Big(A, \overrightarrow{n}\Big)$.

Exemple

Définition

Tout vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul sa direction est perpendiculaire au plan (P) s'appelle vecteur normal au plan (P).

Remarques

Si $\overrightarrow{n}$ est normale au plan $P\Big(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\Big)$, alors $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{v}$.

Si $\overrightarrow{n}$ est normale au plan (P) et passe par A le plan (P) est noté par $P\Big(A, \overrightarrow{n}\Big)$.

Exemple

5-2/ Ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que $ax + by + cz + d = 0$

Propriété

L'ensemble des points $M\,(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ est un plan, et le vecteur non nul $\overrightarrow{n}\,(a,b,c)$ est un vecteur normal à ce plan.

Exemple

5-3/ Ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$

Propriété 1

$\overrightarrow{n}\,(a, b, c)$ est un vecteur non nul et $A(x_A, y_A, z_A)$ est un point de l'espace $(\mathscr{E})$.

L'ensemble des points $M\,(x, y, z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$ est le plan (P) qui passe par A et le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à ce plan (c.à.d. $P\left(A, \overrightarrow{n}\right)$).

Le plan (P) a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

Exemple

Propriété 2

Tout plan $P\left(A, \overrightarrow{n}\,(a, b, c)\right)$ a pour équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ la réciproque avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

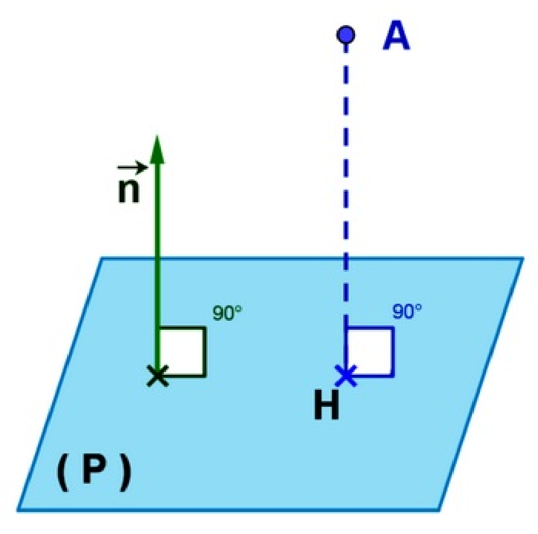
Exemple

VI- Distance d'un point à un plan

6-1/ Définition

(P) est un plan et A est un point de l'espace et H est la projection orthogonale de A sur le plan (P).

La distance du point A au plan (P) est AH, et on note $AH = d(A, (P))$.



6-2/ Propriété

(P) est un plan et $A(x_A, y_A, z_A)$ est un point de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que (P) a pour équation $ax + by + cz + d = 0$.

La distance du point A au plan (P) est :

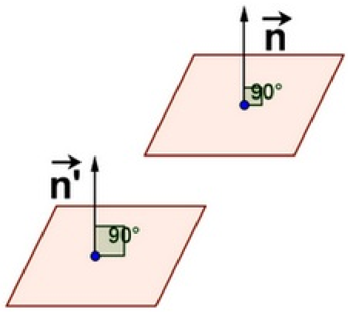
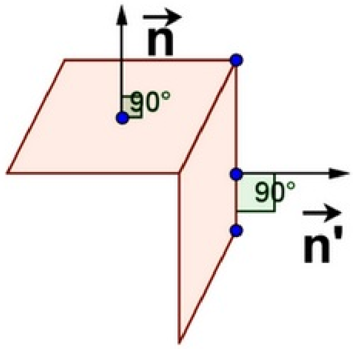
$$AH = d(A,(P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

VII- Parallélisme et orthogonalité des droites et des plans

7-1/ Parallélisme et orthogonalité de deux plans

Propriété

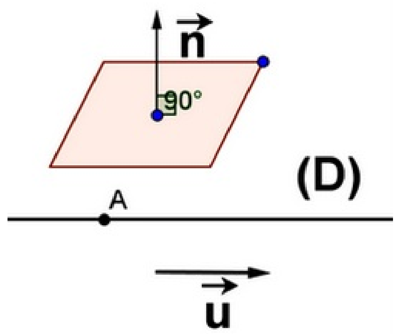
Soient $(P_1) : ax+by+cz+d=0$ et $(P_2) : a'x+b'y+c'z+d'=0$.

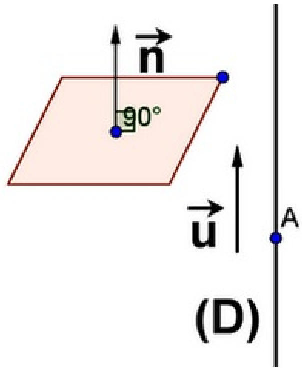
$(P_2) \parallel (P_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{n'} = \alpha \overrightarrow{n}$	
$(P_2) \perp (P_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{n'} . \overrightarrow{n} = 0$	

Exemple

Propriété

Soient $P\left(B, \overrightarrow{n}\right)$ et $D\left(A, \overrightarrow{u}\right)$

$(D) \parallel (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{u} . \overrightarrow{n} = 0$	
$(D) \perp (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{n}$	



Exemple

IIX- Étude analytique du sphère

8-1/ Définition d'une sphère

Ω est un point donné de l'espace $(\mathscr{E})$ et $R > 0$

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $\Omega M = R$ s'appelle le sphère de centre Ω et de rayon R.

On note (S) ou $S\left(\Omega, R\right)$

8-2/ Équation cartésienne d'une sphère

L'équation cartésienne de $(S) = S\left(\Omega\left(a, b, c\right), R\right)$ est :

$M\left(x, y, z\right) \in (S) \Leftrightarrow \Omega M = R$

$\left(x - a\right)^2 + \left(y - b\right)^2 + \left(z - c\right)^2 = R^2$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ avec $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$

8-3/ Équation cartésienne d'une sphère déterminée par un diamètre $[AB]$

Définition

Ω est le milieu de $[AB]$

$[AB]$ est un diamètre du sphère (S) donc A et B appartiennent à (S)

On dit la sphère de diamètre $[AB]$ on note (S) ou $S_{[AB]}$.

Propriété

L'équation cartésienne de $S_{[AB]}$ est : $M\left(x, y, z\right) \in S_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

ou bien $\left(x - x_A\right)\left(x - x_B\right) + \left(y - y_A\right)\left(y - y_B\right) + \left(z - z_A\right)\left(z - z_B\right) = 0$

8-4/ L'ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

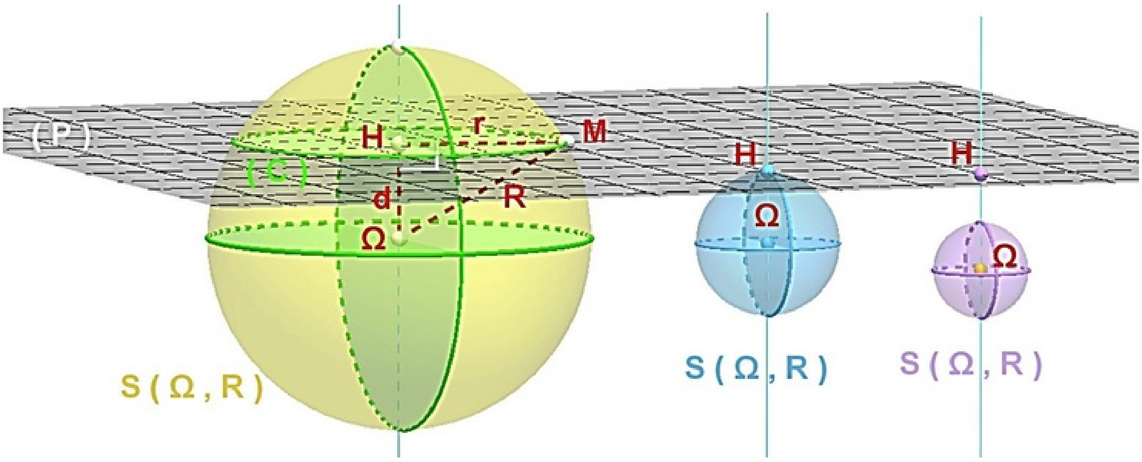
On pose $A = a^2 + b^2 + c^2 - 4d$

L'ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ est :

- $(E)=\emptyset$ si $A<0$
- $(E)=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)\right\}$ si $A=0$
- La sphère $(E)=S\left(\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right),R=\frac{\sqrt{A}}{2}\right)$ si $A>0$

IIX- Étude analytique de la sphère

8-5/ Positions relatives d'une sphère et un plan



Cas 1 : $d=\Omega H>R$

$(P)\cap(S)=\emptyset$

Cas 2 : $d=\Omega H=R$

$(P)\cap(S)=\{H\}$; (P) et (S) sont tangents en H avec $(H\Omega)\perp(P)$

Cas 3 : $d=\Omega H<R$

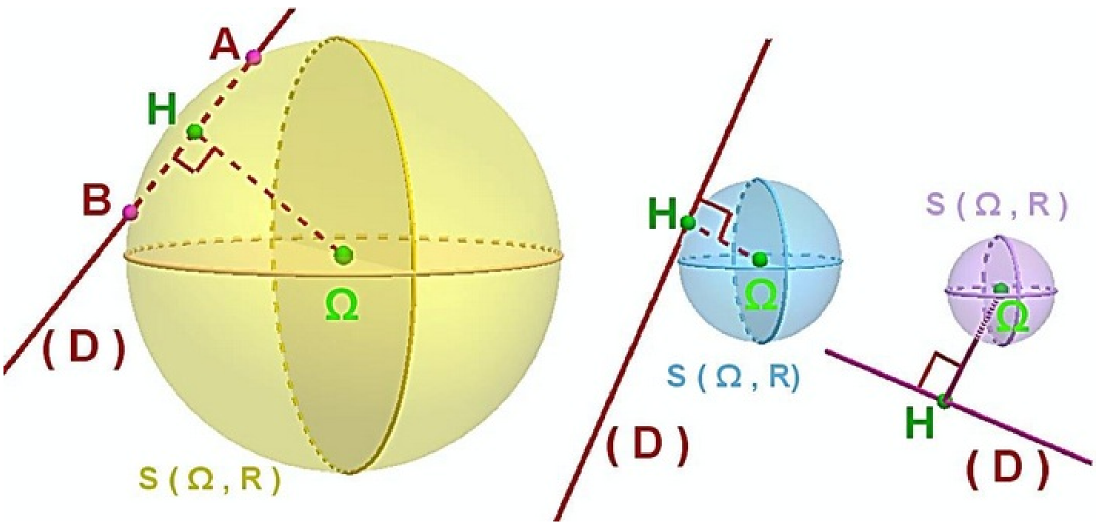
$(P)\cap(S)=(C)$; (P) coupe (S) suivant le cercle de centre H et de rayon $r=R_c=\sqrt{R^2-d^2}$

Équation du plan tangent à une sphère

Par un point A quelconque d'une sphère (S) il existe un et un seul plan (Q) tangente au sphère (S) au point A.

L'équation de (Q) est : $M\in(Q)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$

8-6/ Positions relatives d'une sphère et une droite



Cas 1 : $d = \Omega H > R$

$(D) \cap (S) = \emptyset$

Cas 2 : $d = \Omega H = R$

$(D) \cap (S) = \{H\}$; (D) et (S) sont tangents en H avec $(H\Omega) \perp (D)$

Cas 3 : $d = \Omega H < R$

(D) coupe (S) en deux points A et B (Deux points mais pas le segment $[AB]$)

IX- Exercices

9-1/ Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(2,1,3)$, $B(3,1,1)$, $C(2,2,1)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$$

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$
2. En déduire que $2x + 2y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Montrer que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(1,-1,0)$ et pour rayon 6.
4. Montrer que $d(\Omega, (ABC)) = 3$, et en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).
5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC).
6. Montrer que le point B est le centre du cercle (Γ).

9-2/ Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère le plan (P) passant par le point $A(0,1,1)$ et dont $\vec{u}(1,0,-1)$ est un vecteur normal et la sphère (S) de centre le point $\Omega(0,1,-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Montrer que $x - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P).
2. Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et vérifier que $B(-1,1,0)$ est le point de contact.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale au plan (P).
4. Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) au point $C(1,1,0)$.
5. Montrer que $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OCB.

9-3/ Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$ et le plan (P) d'équation $y-z=0$.

1. Montrer que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(1,1,1)$ et pour rayon 2.
2. Calculer $d(\Omega,(P))$ et en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C).
3. Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).

Soit (Δ) la droite passant par le point $A(1,-2,2)$ et orthogonale au plan (P).

4. Montrer que $\overrightarrow{u}(0,1,-1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).
5. Montrer que $||\overrightarrow{\Omega A}\wedge\overrightarrow{u}||=\sqrt{2}\,||\overrightarrow{u}||$ et en déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.
6. Déterminer les coordonnées de chaque point d'intersection de la droite (Δ) et de la sphère (S).

9-4/ Exercice 4

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$, on considère les points $A(0,-2,-2)$, $B(1,-2,-4)$ et $C(-3,-1,2)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ et en déduire que $2x+2y+z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

On considère la sphère (S) dont une équation est $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$.

2. Vérifier que la sphère (S) a pour centre $\Omega(1,0,1)$ et pour rayon $R=5$.
3. Vérifier que $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC).
4. Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) .
5. Vérifier que $d(\Omega,(ABC))=3$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4, dont on déterminera le centre.

9-5/ Exercice 5

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$, on considère le plan (P) d'équation $x+2y-z-1=0$.

1. Les points $A(1;1;2)$ et $B(2;1;1)$ appartiennent-ils au plan (P) ?
2. Calculer la distance AB puis les distances de ces deux points A et B au plan (P).
3. Le point A est-il le projeté orthogonal de B sur le plan (P) ?

9-6/ Exercice 6

On considère les plans d'équations respectives $(P)\ x-y+z=0$ et $(Q)\ 2x+3y+z-6=0$, et la sphère (S) de centre $\Omega\,(1;2;4)$ et tangente au plan (P).

Soit la droite (Δ) qui passe par Ω et perpendiculaire au plan (Q).

1. Monter que les plans (P) et (Q) sont orthogonaux.
2. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S).
3. Déterminer le point de tangence de (P) et (S).
4. Déterminer le point d'intersection de (Δ) et (Q).
5. Montrer que le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant une cercle dont on déterminera le centre et le rayon.