Mathématiques : 3ème Année Collège

Séance 12 (Repère dans le plan)

Professeur : Mr BENGHANI Youssef

Sommaire

I- Les coordonnées d'un point

1-1/ Repère Orthonormé du Plan

1-2/ Coordonnées d'un point

1-3/ Coordonnées du milieu d'un segment

II- Les coordonnées d'un vecteur

2-1/ Propriété 1

2-2/ Propriété 2

2-3/ Propriété 3

III- La distance entre deux points

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

4-2/ Exercice 2

4-3/ Exercice 3

4-4/ Exercice 4

4-5/ Exercice 5

4-6/ Exercice 6

4-7/ Exercice 7

I- Les coordonnées d'un point

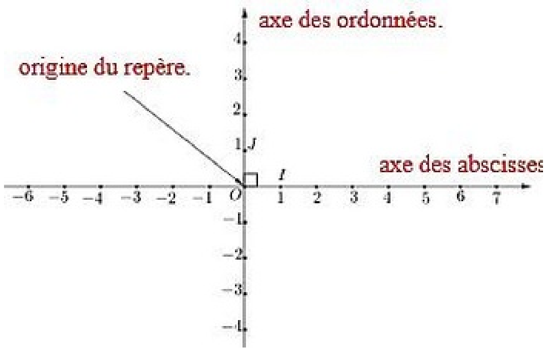
1-1/ Repère Orthonormé du Plan

Un repère orthonormé est un ensemble de deux axes gradués avec la même unité $(OI = OJ = 1unité)$, perpendiculaires et ayant la même origine.

On le note $(O; I; J)$.

La droite (OI) est appelée l'axe des abscisses.
La droite (OJ) est appelée l'axe des ordonnées.
Le point O est appelé l'origine du repère.

Dans ce cours le Plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; I; J)$:



1-2/ Coordonnées d'un point

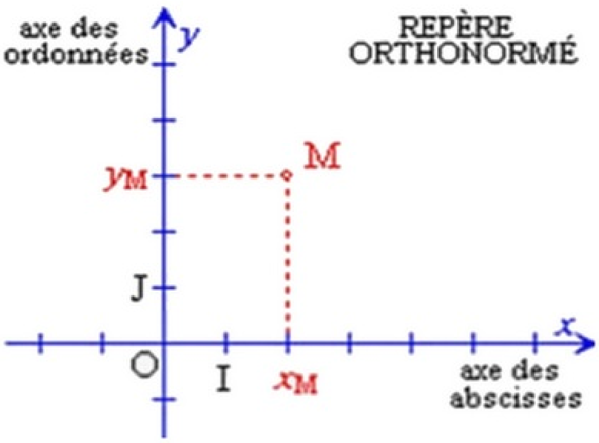
Définition

Soit un repère orthonormé $(O; I; J)$.

Tout point M du plan est repéré par un unique couple de réels $(x_M; y_M)$.

Ce couple $(x_M; y_M)$ est appelé coordonnées du point M.

- x_M : L'abscisse du point M.
- y_M : L'ordonnée du point M.



Remarque importante

Si le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; I; J)$, alors :

$$O(0; 0) \ ; \ I(1; 0) \ ; \ J(0; 1)$$

Si M appartient à l'axe des abscisses alors son ordonné est nul. On écrit : $M(x_M; 0)$

Si M appartient à l'axe des ordonnées alors son abscisse est nul. On écrit : $M(0; y_M)$

1-3/ Coordonnées du milieu d'un segment

Dans un repère $(O; I; J)$, on considère les points $A\,(x_A; y_A)$ et $B\,(x_B; y_B)$.

Si K est le milieu du segment $[AB]$ alors :

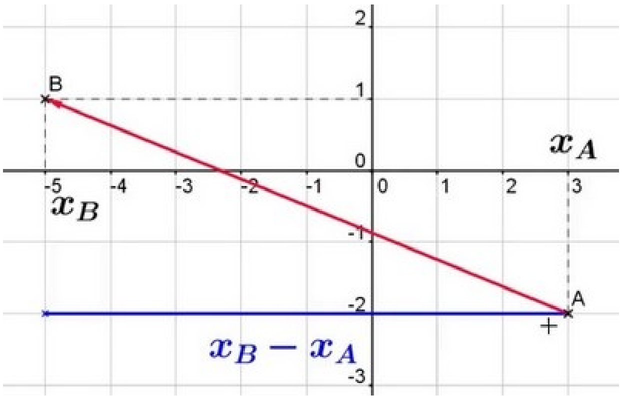
$$K\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

II- Les coordonnées d'un vecteur

2-1/ Propriété 1

Dans un plan rapporté à un repère $(O; I; J)$, on considère les points $A\left(x_A; y_A\right)$ et $B\left(x_B; y_B\right)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\left(x_B - x_A; y_B - y_A\right)$



Exemples

2-2/ Propriété 2

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

Si $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ alors $\begin{cases} x_C - x_D = x_B - x_A \\ y_C - y_D = y_B - y_A \end{cases}$

2-3/ Propriété 3

Si $\overrightarrow{AB}\left(x; y\right)$ et $\overrightarrow{CD}\left(x'; y'\right)$ Alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\left(x + x'; y + y'\right)$

Soit k un nombre réel, $\overrightarrow{kAB}$ a pour coordonnées $(kx; ky)$.

III- La distance entre deux points

Propriété

Dans un repère orthonormé, soient $E\left(x_E; y_E\right)$ et $F\left(x_F; y_F\right)$.

Alors, la distance entre E et F est donnée par :

$$EF = \sqrt{\left(x_F - x_E\right)^2 + \left(y_F - y_E\right)^2}$$

Conséquence

Si $\overrightarrow{AB}\left(x; y\right)$, alors $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemples

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

On considère les points :

$$A(-2;3)\ \ ,\ \ B\{5;1)$$
$$C(-6,5;-2)\ \ ,\ \ D(-8;-3,2)$$
$$E\left(\frac{2}{3};\frac{5}{2}\right)\ \ ,\ \ F\left(-\frac{1}{4};-\frac{7}{4}\right)$$
$$G\left(11;-\sqrt{3}\right)\ \ ,\ \ H\left(-4;\sqrt{12}\right)$$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{EF}\ ;\ \overrightarrow{GH}\ ;\ \overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{FD}$$

4-2/ Exercice 2

On considère un repère du plan.

1. Dans chacun des cas, déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$:

$$a)\ A(1;-5)\ et\ B(3;-9)$$
$$b)\ A(-2;1)\ et\ B(2;0)$$
$$c\Big)\ A\left(-3;\ \sqrt{2}\right)\ et\ B\left(2;-\ \sqrt{2}\right)$$

2. Calculer les coordonnées du point B tel que I est le milieu du segment $[AB]$:

$$a)\ A(2;-3)\ et\ I(4;3)$$
$$b)\ A(-1;-2)\ et\ I(5;0)$$

4-3/ Exercice 3

Dans un repère orthonormé du pian, on considère les points $A(4;1)$, $B(0;4)$ et $C(-6;-4)$

1. Calculer AB, AC et BC.
2. En déduire que le triangle ABC est rectangle.
3. Trouver les coordonnées du centre du cercle circonscrit à ce triangle. Quel est son rayon ?

4-4/ Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(6;3)$, $B(3;2)$ et $C(7;0)$.

1. Construire les points A, B et C.
2. Déterminer le couple de coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3. Calculer les distances AB, AC et BC.
4. Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

On considère le point $D(4;-1)$.

5. Construire le point D.
6. Montrer que les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
7. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

4-5/ Exercice 5

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(3;4)$, $B(3;-2)$ et $C(-4;-2)$.

1. Tracer la figure.

2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. Calculer les coordonnées du point K le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.
4. Déterminer les coordonnées du point D l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
5. Calculer les coordonnées du point E tel que : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}$.
6. Montrer que le point C est le milieu de $[DE]$.
7. Calculer les coordonnées du point N tel que : $\overrightarrow{AN}=-3\overrightarrow{AB}$.
8. Calculer les coordonnées du point F point d'intersection de la droite (AB) et l'axe des abscisses.

4-6/ Exercice 6

On considère les points $A(4;1)$; $B(2;3)$; $C(-1;0)$ et $D\,(1;-2)$.

1. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculer les distances AB, AC et BC.
3. Montrer que $ABCD$ est un rectangle.

4-7/ Exercice 7

On considère les points $A\,(1;2)$; $B\,(3;1)$; $C(-1;1)$ et $D\,(1;0)$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
3. Montrer que $ABDC$ est un losange.
4. Calculer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{CE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{CD}$.