Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Séance 11 (Calcul intégral)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Intégrale d'une fonction continue

1-1/ Définition

f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Le nombre $F(b) - F(a)$ est appelé intégral de f de a à b.

On note $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = [F(x)]_a^b$.

On lit intégral de a à b de $f(x)dx$.

Remarque

Pour toute fonction f continue, on a : $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$

Pour toute fonction f continue sur $[a, b]$, on a : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Exemple

1-2/ Propriété 1

f et g sont deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$.

On a :

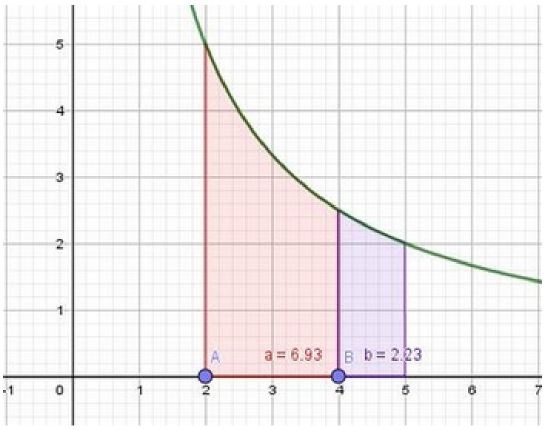
$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ ;\ \ (\alpha \in \mathbb{R})$

1-3/ Propriété 2 (Relation de Chasles)

f est une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois réels appartenant à I.

On a :

$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $a \leq b \leq c$. (Relation de Chasles).



1-4/ Propriété 3 (Intégrales et inégalité)

f et g sont deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$.

Si f est positive sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Si pour tout $x \in [a, b]$ on a $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

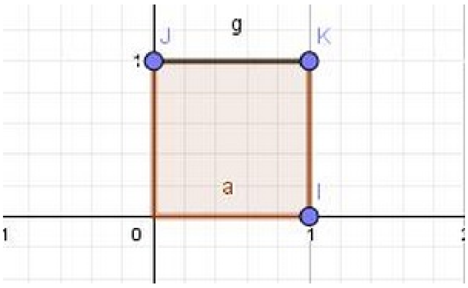
II- Interprétation géométrique d'une intégrale

2-1/ Définition

Soit un repère orthogonal du plan.

On note I et J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$.

L'unité d'aire, que l'on note $u.a$, est l'aire de rectangle $OIKJ$

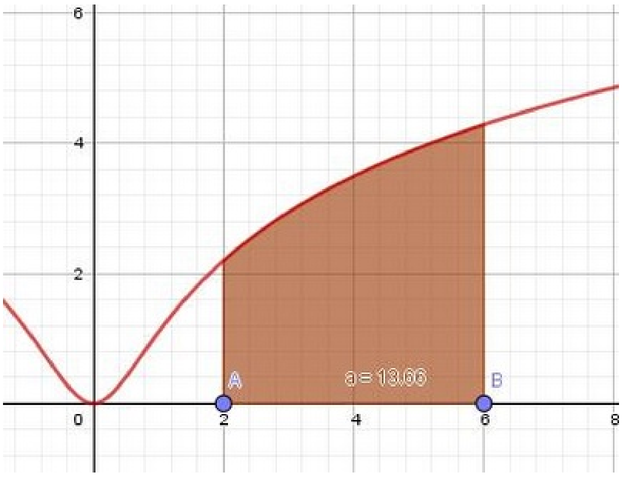


2-2/ Propriété (Notion de l'intégrale)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, et soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

L'aire A (exprimée en unité d'aire) de la partie (F) du plan (P) comprise entre la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à l'intégrale de a à b de f.

On a : $A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ (u.a)$



III- La valeur moyenne

3-1/ Propriété

f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et $a < b$.

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est le nombre μ défini par : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Il existe un élément c de $[a, b]$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

IV- Intégration par parties

4-1/ Théorème

u et v sont deux fonctions dérivables sur $[a, b]$.

Leurs dérivées u' et v' sont continues sur $[a, b]$.

On a :

$$\underbrace{\int_a^b u(x)\times v'(x)\,dx}_{(1)} = \underbrace{\left[u(x)\times v(x)\right]_a^b}_{(2)} - \underbrace{\int_a^b u'(x)\times v(x)\,dx}_{(3)}$$

$u(x) = \cdots \qquad u'(x) = \cdots$

$(1)\downarrow \qquad (2)\searrow \quad - \quad \downarrow(3)$

$v'(x) = \cdots \qquad v(x) = \cdots$

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_0^1 \frac{4}{3x+1} \,\mathrm{d}\,x$ $B = \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)} \,\mathrm{d}\,x$ $C = \int_0^{\ln(2)} e^{2x} - 3e^x \,\mathrm{d}\,x$ $D = \int_1^5 3x\left(x^2-2\right)^2 \mathrm{d}\,x$	$E = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \,\mathrm{d}\,x$ $F = \int_0^{\ln 2} e^x\left(e^x - 1\right) \mathrm{d}\,x$ $G = \int_1^e \frac{\ln^3(x)}{x} \,\mathrm{d}\,x$ $H = \int_{\ln 2}^{\ln 7} \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+2}} \,\mathrm{d}\,x$

5-2/ Exercice 2

1. Montrer que $F : x \to \frac{1}{2}\ln^2 x$ est une fonction primitive de la fonction $f : x \to \frac{\ln x}{x}$
2. Calculer $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} \,\mathrm{d}\,x$
3. Vérifier que la fonction G définie sur $]0;+\infty[$ par $G(x) = x\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g\,(x) = \ln x$
4. Calculer $I = \int_1^e \ln x \,\mathrm{d}\,x$
5. Vérifier que la fonction H définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $H\,(x) = (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction h définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $h\,(x) = xe^x$
6. Montrer que $\int_1^2 xe^x \,\mathrm{d}\,x = e^2$
7. Calculer A l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathscr{C}_h)$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

5-3/ Exercice 3

1. Vérifier que $x^2 - 2x + 7 - \frac{10}{x+2} = \frac{x^3+3x+4}{x+2}$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$.
2. En déduire $I = \int_0^1 \frac{x^3+3x+4}{x+2} \,\mathrm{d}\,x$
2. Calculer $\int_0^1 xe^x \,\mathrm{d}\,x$ par une integration par parties et en déduire $\int_0^1 \left(x - e^{-2x}\right)e^x \,\mathrm{d}\,x$

5-4/ Exercice 4

1. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

$$A = \int_0^1 xe^x \,\mathrm{d}\,x$$
$$B = \int_e^{e^2} x^2 \ln(x) \,\mathrm{d}\,x$$
$$C = \int_1^e \ln x \,\mathrm{d}\,x$$
$$D = \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\,x$$
$$E = \int_0^1 xe^{-x} \,\mathrm{d}\,x$$

2. Vérifier que $\frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1 + \frac{2x}{x^2+1}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.
3. En déduire l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \, \mathrm{d}\, x$.