AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Séance 13 (Équations différentielles)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Équation différentielle de la forme $y' = ay + b$

1-1/ Propriété 1

Soit l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$.

Cas général $(a \neq 0)$

l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme $f(x) = \alpha . e^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cas particulier 1 $(a = 0\ ;\ b = 0)$

l'équation (E) est $y' = 0$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme $f(x) = c$.

Cas particulier 2 $(a = 0\ ;\ b \neq 0)$

l'équation (E) est $y' = b$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme $f(x) = bx + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1-2/ Propriété 2

Soit l'équation différentielle $(E)\ :\ y' = ay + b$ avec $(a \neq 0)$.

Il existe une et une seule fonction $f(x)$ qui est solution de l'équation (E) et qui vérifie la condition initiale $f(x_0) = y_0\ ;\ x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

II- Équation différentielle de la forme $y'' + ay' + by = 0$

2-1/ Définition

L'équation différentielle de la forme $y'' + ay' + by = 0$ tel que l'inconnue est la fonction y avec y' sa dérivée première et y'' sa dérivée seconde, s'appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant sans seconde membre.

L'équation $r^2 + ar + b = 0\ (r \in \mathbb{C})$ s'appelle l'équation caractéristique de l'équation $y'' + ay' + by = 0$.

Le nombre $\Delta = a^2 - 4b$ s'appelle le discriminant de l'équation caractéristique.

2-2/ Propriété

La solution générale de l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + ay' + by = 0$ dépend du signe de Δ.

Cas 1 : $\Delta > 0$

L'équation caractéristique a deux solutions réelles sont r_1 et r_2.

D'où la solution générale de (E) sont les fonctions de la forme $y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}\ ;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Cas 2 : $\Delta = 0$

L'équation caractéristique a une solution réelle r_1.

D'où la solution générale de (E) sont les fonctions de la forme $y(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_1 x}\ ;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Cas 3 : $\Delta < 0$

L'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées $r_1 = p + qi$ et $r_2 = \overline{r_1} = p - qi$.

D'où la solution générale de (E) sont les fonctions de la forme $y(x) = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))e^{px}\ ;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

III- Exercices

3-1/ Exercice 1

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$5y' = 0$$
$$y' = -8y$$

2. Résoudre $y' = 5y + 1$ puis déterminer la solution qui vérifie la condition $g(0) = 2$
3. Résoudre $(E)\ :\ y' + 2y = 0$
4. Montrer que $y_0 = e^{-3x}$ est solution de l'équation $(E')\ :\ y' + 2y = -e^{-3x}$.

3-2/ Exercice 2

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
$$(E_1)\ :\ 4y'' - 4y' + y = 0$$
$$(E_2)\ :\ y'' - 2y' + 5y = 0$$
2. Résoudre l'équation $(E)\ :\ y'' - 3y' + 2y = 0$
3. Déterminer la solution qui vérifie les conditions $g(0) = -3$ et $g'(0) = -2$.

3-3/ Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes :
$$(E_1)\ :\ \begin{cases} y' = \frac{2}{x} - 1 + 4x \\ y(1) = -7 \end{cases}$$
$$(E_2)\ :\ \begin{cases} 2y' + 14y = 5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
$$(E_3)\ :\ \begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0\ et\ y'(0) = -3 \end{cases}$$

3-4/ Exercice 4

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$.
2. Résoudre l'équation différentielle suivante $(E)\ :\ y'' - 6y' + 13y = 0$.
3. Déterminer la fonction f solution de (E) tel que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.
4. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi} e^{3x} \sin(2x)\,\mathrm{d}\,x$.

3-5/ Exercice 5

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)z + 9 = 0$.

On notera z_1 et z_2 les solutions trouvées, z1 étant la solution de partie imaginaire positive.

2. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2, puis donner l'écriture exponentielle de z_1 et de z_2.
3. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - 6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)y' + 9y = 0$

3-6/ Exercice 6

On considère l'équation suivante : $(E) :\ z \in \mathbb{C}\ ,\ z^2 - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}z + 1 = 0$

1. Montrer que : $\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$
2. Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E) avec $Im(z_1) > 0$.
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle suivante :
$(E) :\ 2y'' - \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)y' + 2y = 0$
4. Donner l'écriture trigonométrique de z_1 et z_2.