Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Séance 12 (Calcul intégral)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Intégral d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$

Définition

f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Le nombre $F(b) - F(a)$ est appelé intégral de f de a à b.

On note $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$.

On lit intégral de a à b de $f(x)dx$.

Remarque

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ on peut remplacer le variable x soit par les variables y et z et t, donc : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t = \ldots$

Exemple

II- Propriétés : Relation de Shales – Linéarité – Ordre

2-1/ Propriété

f est une fonction dérivable sur un segment $[a,b]$ et sa fonction dérivée f ' est continue sur $[a,b]$.

On a :

$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}\,x = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$
$\int_a^b c\,\mathrm{d}\,x = [cx]_a^b = c(b-a)\ ;\ \ (c \in \mathbb{R})$

2-2/ Relation de Chasles

f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$.

On a :

$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$
$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}\,x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$
$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$. (Relation de Chasles).

2-3/ Linéarité

f et g sont deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$.

On a :

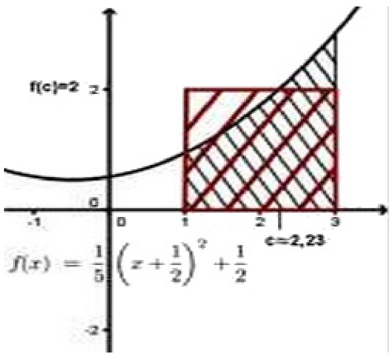
$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x$
$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}\,x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\ ;\ \ (\alpha \in \mathbb{R})$

III- Valeur moyenne

f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et $a < b$.

Il existe au moins un élément c de $[a,b]$ tel que : $(b-a) \times f(c) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$

Le nombre $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.



IV- Intégration par parties

Théorème

u et v sont deux fonctions dérivables sur $[a, b]$.

Leurs dérivées u' et v' sont continues sur $[a, b]$.

On a :

$$\underbrace{\int_a^b u(x)\times v'(x)dx}_{(1)} = \underbrace{\left[u(x)\times v(x)\right]_a^b}_{(2)} - \underbrace{\int_a^b u'(x)\times v(x)dx}_{(3)}$$

$$\begin{array}{ccccc} u(x)=\cdots & & & u'(x)=\cdots \\ (1)\downarrow & & (2)\searrow & - & \downarrow(3) \\ v'(x)=\cdots & & & v(x)=\cdots \end{array}$$

Exemple

V- Applications sur les intégrales

5-1/ Calcul des surfaces

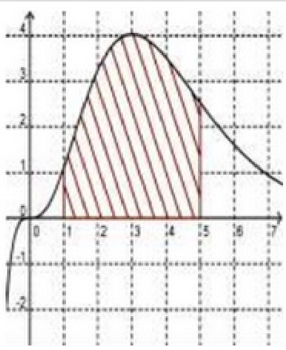
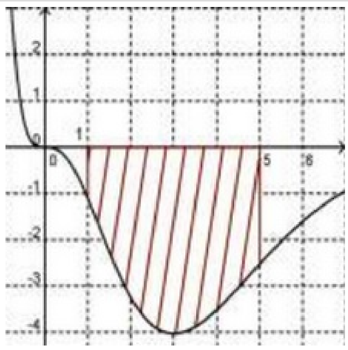
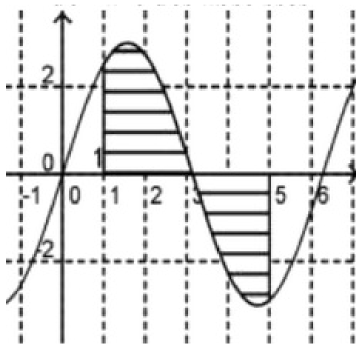
Propriété

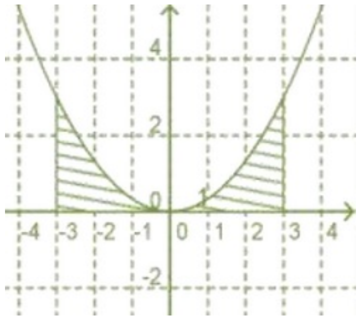
f *et* g deux fonctions continues sur $[a, b]$, $(\mathscr{C}_f)$ *et* $(\mathscr{C}_g)$ les courbes de f *et* g dans le plan (P) qui est rapporté à un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

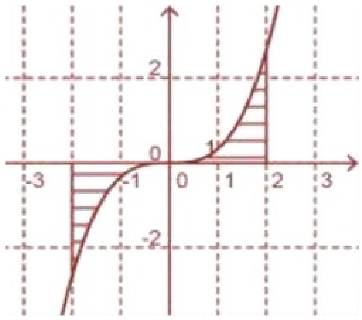
L'aire S (la surface) de la partie (F) du plan (P) comprise entre la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \times \left\|\vec{i}\right\| \times \left\|\vec{j}\right\|$ (unité d'aire)

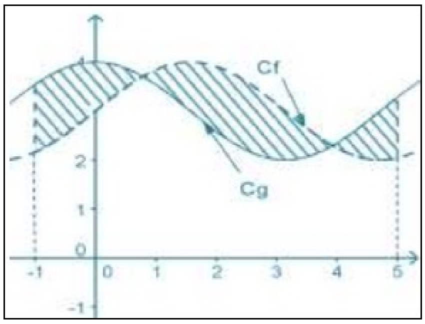
L'aire S (la surface) de la partie du plan (P) comprise entre la courbe $(\mathscr{C}_f)$ *et* $(\mathscr{C}_g)$ est $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \times \left\|\vec{i}\right\| \times \left\|\vec{j}\right\|$ (unité d'aire)

Les cas possibles





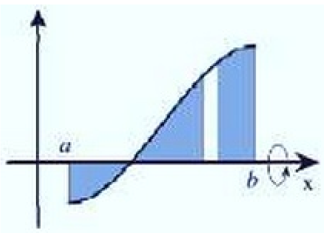


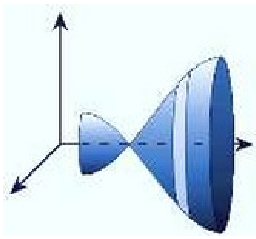
5-2/ Calcul des volumes

Propriété

L'espace est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

$\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe de f, une fonction continue sur $[a, b]$ avec $(a < b)$.
Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de la fonction f sur $[a, b]$ au tour de l'axe des abscisse de 360°, son volume est $V = \int_a^b \pi(\mathrm{f}\,(\mathrm{x}))^2 \,\mathrm{d}\,x \times \left\|\overrightarrow{i}\right\| \times \left\|\overrightarrow{j}\right\| \times \left\|\overrightarrow{k}\right\|$ (unité de volume).





Exemple

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$a = \int_1^2 \left(x^2 + 2x + 3\right) \mathrm{d}\,x$	$f = \int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+x} \mathrm{d}\,x$	
$b = \int_0^1 \left(x^5 - 6x\right) \mathrm{d}\,x$	$g = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{e^x-1}{e^x-2xe^x+x^2} \mathrm{d}\,x$	
$c = \int_1^2 \frac{x+1}{(x^2+2x)^3} \mathrm{d}\,x$	$h = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 \mathrm{d}\,x$	
$d = \int_0^1 \left(x + 3\right) \left(x^2 + 6x + 1\right)^3 \mathrm{d}\,x$	$j = \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \mathrm{d}\,x$	
$e = \int_{-1}^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}\,x$		

6-2/ Exercice 2

On considère les deux intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x} \mathrm{d}\,x$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x} \mathrm{d}\,x$

1. Calculer $I - J$.
2. Calculer $I + J$.

3. En déduire la valeur de I et J.

6-3/ Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes par la méthode d'intégration par parties :

$I_1 = \int_0^1 xe^x \,\mathrm{d}\,x$ $I_2 = \int_1^e x\ln x \,\mathrm{d}\,x$ $I_3 = \int_0^\pi x\sin x \,\mathrm{d}\,x$ $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x \,\mathrm{d}\,x$ $I_5 = \int_1^x \ln t \,\mathrm{d}\,t$ $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \,\mathrm{d}\,x$	$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x \,\mathrm{d}\,x$ $I_8 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}} \,\mathrm{d}\,x$ $I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}\,x$ $I_{10} = \int_1^e x^2\ln x \,\mathrm{d}\,x$ $I_{11} = \int_0^1 xe^{2x} \,\mathrm{d}\,x$	

6-4/ Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1)Calculer les intégrales $I = \int_1^e \frac{dx}{x}$ et $J = \int_1^e \ln x dx$.

2. Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
3. Montrer que $G(x) = x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right]$ est une fonction primitive de la fonction $g(x) = (\ln x)^2$.

Soit $t \in]0; 1[$

4. Calculer les intégrales $A = \int_t^1 \left(\frac{\ln x}{x}\right) \mathrm{d}\,x$ et $B = \int_t^1 (\ln x)^2 \,\mathrm{d}\,x$.
5. Calculer en fonction de t le volume $V(t)$ du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ sur l'intervalle $[t; 1]$.
6. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} V\left(t\right)$

6-5/ Exercice 5

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{e^x(1-x)}$ et $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

1. Étudier les variations de f sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$
2. En déduire que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]\right) : \; 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$
3. Vérifier que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]\right) : \; 1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$
4. Montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} \,\mathrm{d}\,x + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) \,\mathrm{d}\,x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}\,x}{e^x(1-x)}$
5. Calculer : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} \,\mathrm{d}\,x$
6. Montrer que : $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) \,\mathrm{d}\,x \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$

6-6/ Exercice 6

Pour tout réel positif a, on définit $I(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(a) = -\frac{\ln(a)+1}{a} + 1$.
2. En déduire la limite de $I(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

On définit maintenant $J(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x$.

3. Vérifier que $(\forall x \geq 1) :\ x^2 \leq x^2+1 \leq 2x^2$, puis montrer que $\frac{1}{2}I(a) \leq J(a) \leq I(a)$.