

Sommaire

I- Intégral d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$

II- Propriétés : Relation de Shales - Linéarité - Ordre

2-1/ Propriété

2-2/ Relation de Chasles

2-3/ Linéarité

III- Valeur moyenne

IV- Intégration par parties

V- Applications sur les intégrales

5-1/ Calcul des surfaces

5-2/ Calcul des volumes

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

6-5/ Exercice 5

6-6/ Exercice 6

I- Intégral d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$

Définition

f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Le nombre $F(b) - F(a)$ est appelé intégral de f de a à b .

On note $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$.

On lit intégral de a à b de $f(x)dx$.

Remarque

Dans l'écriture $\int_a^b f(x) dx$ on peut remplacer la variable x soit par les variables y et z et t , donc : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(t) dt = \dots$

Exemple

II- Propriétés : Relation de Shales – Linéarité – Ordre

2-1/ Propriété

f est une fonction dérivable sur un segment $[a, b]$ et sa fonction dérivée f' est continue sur $[a, b]$.

On a :

$$\int_a^b f'(x) dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$$

$$\int_a^b c dx = [cx]_a^b = c(b - a) ; (c \in \mathbb{R})$$

2-2/ Relation de Chasles

f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$.

On a :

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx . \text{ (Relation de Chasles).}$$

2-3/ Linéarité

f et g sont deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$.

On a :

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

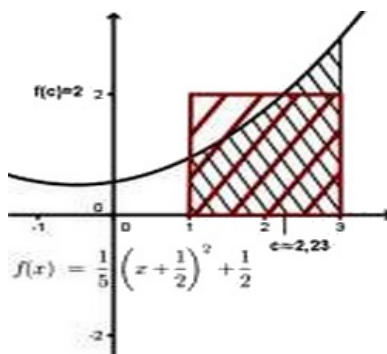
$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx ; (\alpha \in \mathbb{R})$$

III- Valeur moyenne

f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et $a < b$.

Il existe au moins un élément c de $[a, b]$ tel que : $(b - a) \times f(c) = \int_a^b f(x) dx$

Le nombre $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.



IV- Intégration par parties

Théorème

u et v sont deux fonctions dérivables sur $[a, b]$.

Leurs dérivées u' et v' sont continues sur $[a, b]$.

On a :

$$\underbrace{\int_a^b u(x) \times v'(x) dx}_{(1)} = \underbrace{\left[u(x) \times v(x) \right]_a^b}_{(2)} - \underbrace{\int_a^b u'(x) \times v(x) dx}_{(3)}$$

$$u(x) = \dots \qquad u'(x) = \dots$$

$$(1) \downarrow \qquad (2) \searrow \qquad - \downarrow (3)$$

$$v'(x) = \dots \qquad v(x) = \dots$$

Exemple

V- Applications sur les intégrales

5-1/ Calcul des surfaces

Propriété

f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) les courbes de f et g dans le plan (P) qui est rapporté à un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

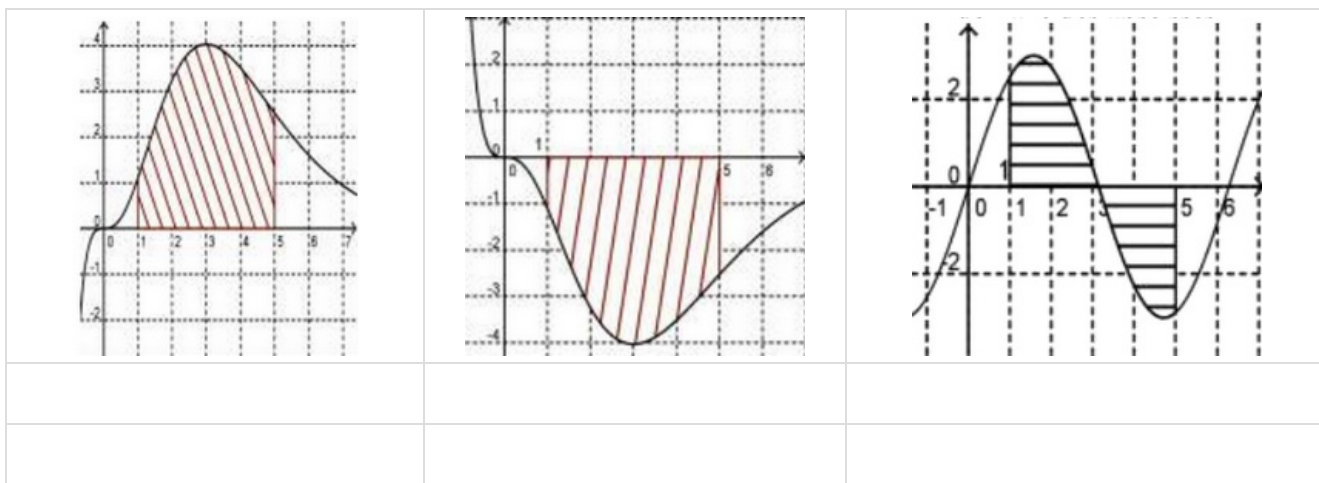
L'aire S (la surface) de la partie (F) du plan (P) comprise entre la courbe (\mathcal{C}_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est

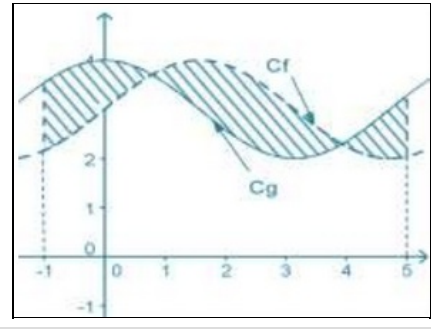
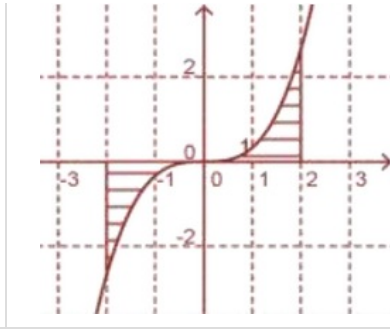
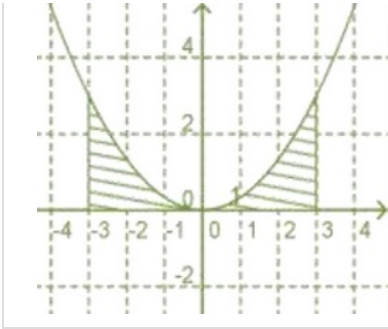
$$\int_a^b |f(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \text{ (unité d'aire)}$$

L'aire S (la surface) de la partie du plan (P) comprise entre la courbe

$$(\mathcal{C}_f) \text{ et } (\mathcal{C}_g) \text{ est } \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \text{ (unité d'aire)}$$

Les cas possibles





5-2/ Calcul des volumes

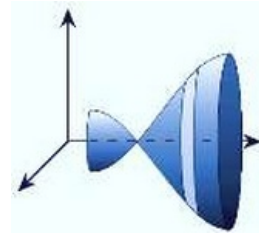
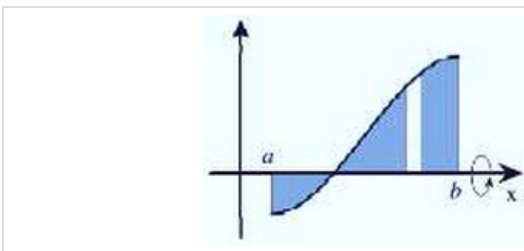
Propriété

L'espace est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(\mathcal{C}_f) la courbe de f , une fonction continue sur $[a, b]$ avec $(a < b)$.

Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (\mathcal{C}_f) de la fonction f sur $[a, b]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° , son volume est

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\| \text{ (unité de volume).}$$



Exemple

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$a = \int_1^2 (x^2 + 2x + 3) dx$$

$$b = \int_0^1 (x^5 - 6x) dx$$

$$c = \int_1^2 \frac{x+1}{(x^2+2x)^3} dx$$

$$d = \int_0^1 (x+3)(x^2+6x+1)^3 dx$$

$$e = \int_{-1}^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$$

$$f = \int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+x} dx$$

$$g = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{e^x-1}{e^x-2xe^x+x^2} dx$$

$$h = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 dx$$

$$j = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$$

6-2/ Exercice 2

On considère les deux intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$

1. Calculer $I - J$.
2. Calculer $I + J$.
3. En déduire la valeur de I et J .

6-3/ Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes par la méthode d'intégration par parties :

| | | |
|--|--|--|
| $I_1 = \int_0^1 x e^x dx$ | $I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$ | |
| $I_2 = \int_1^e x \ln x dx$ | $I_8 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$ | |
| $I_3 = \int_0^{\pi} x \sin x dx$ | $I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ | |
| $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ | $I_{10} = \int_1^e x^2 \ln x dx$ | |
| $I_5 = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \ln t dt$ | $I_{11} = \int_0^1 x e^{2x} dx$ | |
| $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ | | |

6-4/ Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

Soit (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Calculer les intégrales $I = \int_1^e \frac{dx}{x}$ et $J = \int_1^e \ln x dx$.
2. Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (\mathcal{C}_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
3. Montrer que $G(x) = x \left[(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2 \right]$ est une fonction primitive de la fonction $g(x) = (\ln x)^2$.

Soit $t \in]0; 1[$

4. Calculer les intégrales $A = \int_t^1 \left(\frac{\ln x}{x} \right) dx$ et $B = \int_t^1 (\ln x)^2 dx$.
5. Calculer en fonction de t le volume $V(t)$ du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe (\mathcal{C}_f) sur l'intervalle $[t; 1]$.
6. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t)$

6-5/ Exercice 5

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{e^x(1-x)}$ et $x \in [0; \frac{1}{2}]$

1. Étudier les variations de f sur $[0; \frac{1}{2}]$
2. En déduire que : $(\forall x \in [0; \frac{1}{2}]) : 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$

3. Vérifier que : $(\forall x \in [0; \frac{1}{2}]) : 1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

4. Montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{e^x(1-x)}$

5. Calculer : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$

6. Montrer que : $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$

6-6/ Exercice 6

Pour tout réel positif a , on définit $I(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{x^2} dx$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(a) = -\frac{\ln(a)+1}{a} + 1$.

2. En déduire la limite de $I(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

On définit maintenant $J(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{x^2+1} dx$.

3. Vérifier que $(\forall x \geq 1) : x^2 \leq x^2 + 1 \leq 2x^2$, puis montrer que $\frac{1}{2}I(a) \leq J(a) \leq I(a)$.