

Sommaire

I- Intégral d'une fonction continue sur un segment  $[a, b]$

II- Propriétés : Relation de Shales – Linéarité – Ordre

2-1/ Propriété

2-2/ Relation de Chasles

2-3/ Linéarité

III- Valeur moyenne

IV- Intégration par parties

V- Applications sur les intégrales

5-1/ Calcul des surfaces

5-2/ Calcul des volumes

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

6-5/ Exercice 5

6-6/ Exercice 6

---

I- Intégral d'une fonction continue sur un segment  $[a, b]$

**Définition**

$f$  est une fonction continue sur un segment  $[a, b]$  et  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ .

Le nombre  $F(b) - F(a)$  est appelé intégral de  $f$  de  $a$  à  $b$ .

On note  $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$ .

On lit intégral de  $a$  à  $b$  de  $f(x)dx$ .

**Remarque**

Dans l'écriture  $\int_a^b f(x) dx$  on peut remplacer le variable  $x$  soit par les variables  $y$  et  $z$  et  $t$ , donc :  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(t) dt = \dots$

### Exemple

## II- Propriétés : Relation de Shales – Linéarité – Ordre

### 2-1/ Propriété

$f$  est une fonction dérivable sur un segment  $[a, b]$  et sa fonction dérivée  $f'$  est continue sur  $[a, b]$ .

On a :

$$\int_a^b f'(x) dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$$

$$\int_a^b c dx = [cx]_a^b = c(b - a); \quad (c \in \mathbb{R})$$

### 2-2/ Relation de Chasles

$f$  est une fonction continue sur un segment  $[a, b]$ .

On a :

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad . \text{ (Relation de Chasles).}$$

### 2-3/ Linéarité

$f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur un segment  $[a, b]$ .

On a :

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

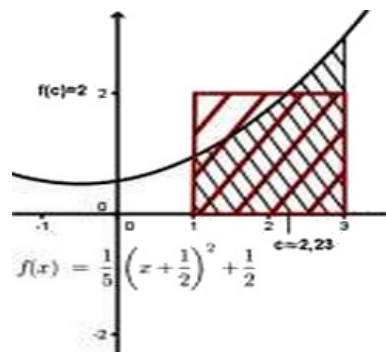
$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx; \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

## III- Valeur moyenne

$f$  est une fonction continue sur un segment  $[a, b]$  et  $a < b$ .

Il existe au moins un élément  $c$  de  $[a, b]$  tel que :  $(b - a) \times f(c) = \int_a^b f(x) dx$

Le nombre  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  s'appelle la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$ .



## IV- Intégration par parties

### Théorème

$u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur  $[a, b]$ .

Leurs dérivées  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $[a, b]$ .

On a :

$$\underbrace{\int_a^b u(x) \times v'(x) dx}_{(1)} = \underbrace{\left[ u(x) \times v(x) \right]_a^b}_{(2)} - \underbrace{\int_a^b u'(x) \times v(x) dx}_{(3)}$$

$$u(x) = \dots \qquad u'(x) = \dots$$

$$(1) \downarrow \quad (2) \searrow \quad - \quad \downarrow (3)$$

$$v'(x) = \dots \qquad v(x) = \dots$$

### Exemple

## V- Applications sur les intégrales

### 5-1/ Calcul des surfaces

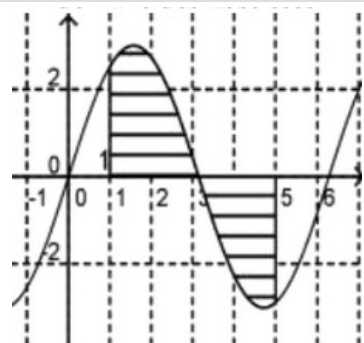
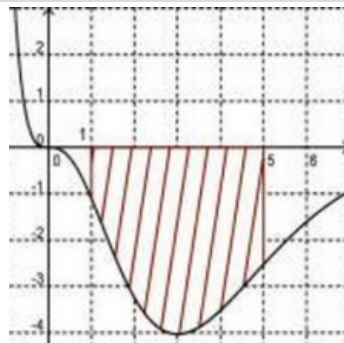
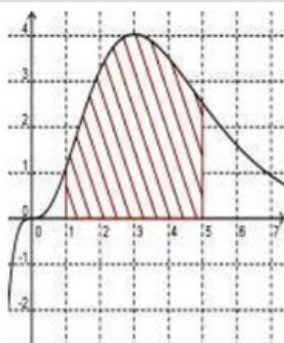
#### Propriété

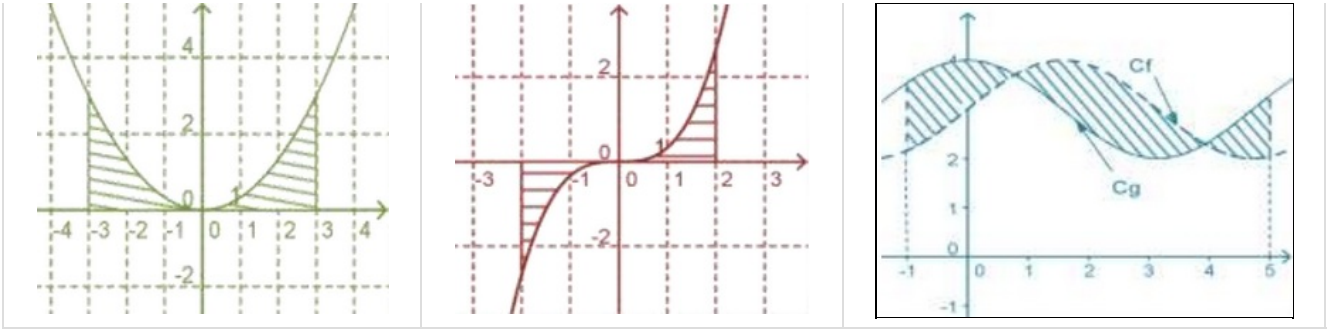
$f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ ,  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$  les courbes de  $f$  et  $g$  dans le plan  $(P)$  qui est rapporté à un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

L'aire  $S$  (la surface) de la partie  $(F)$  du plan  $(P)$  comprise entre la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  et l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  est  $\int_a^b |f(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$  (unité d'aire)

L'aire  $S$  (la surface) de la partie du plan  $(P)$  comprise entre la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$  est  $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$  (unité d'aire)

#### Les cas possibles



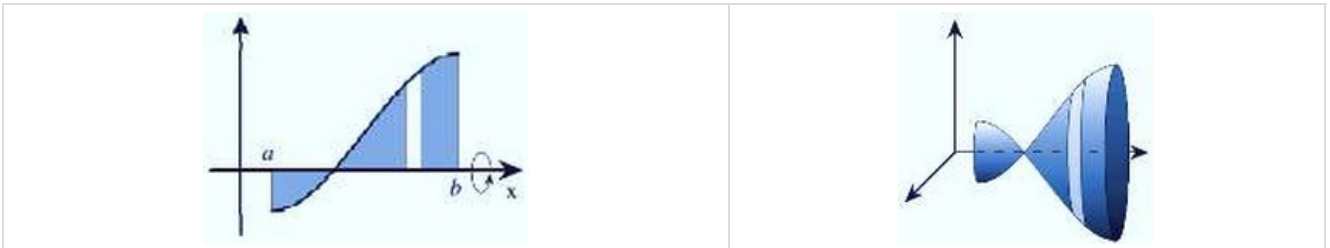
## 5-2/ Calcul des volumes

### Propriété

L'espace est muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

$(\mathcal{C}_f)$  la courbe de  $f$ , une fonction continue sur  $[a, b]$  avec  $(a < b)$ .

Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  au tour de l'axe des abscisse de  $360^\circ$ , son volume est  $V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$  (unité de volume).



### Exemple

## VI- Exercices

### 6-1/ Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$a = \int_1^2 (x^2 + 2x + 3) dx$$

$$b = \int_0^1 (x^5 - 6x) dx$$

$$c = \int_1^2 \frac{x+1}{(x^2+2x)^3} dx$$

$$d = \int_0^1 (x+3)(x^2+6x+1)^3 dx$$

$$e = \int_{-1}^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$$

$$f = \int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+x} dx$$

$$g = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{e^x-1}{e^x-2xe^x+x^2} dx$$

$$h = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 dx$$

$$j = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$$

### 6-2/ Exercice 2

On considère les deux intégrales  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$

1. Calculer  $I - J$ .
2. Calculer  $I + J$ .

3. En déduire la valeur de  $I$  et  $J$ .

### 6-3/ Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes par la méthode d'intégration par parties :

$I_1 = \int_0^1 x e^x dx$	$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$	
$I_2 = \int_1^e x \ln x dx$	$I_8 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$	
$I_3 = \int_0^{\pi} x \sin x dx$	$I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$	
$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$	$I_{10} = \int_1^e x^2 \ln x dx$	
$I_5 = \int_1^x \ln t dt$	$I_{11} = \int_0^1 x e^{2x} dx$	
$I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$		

### 6-4/ Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Calculer les intégrales  $I = \int_1^e \frac{dx}{x}$  et  $J = \int_1^e \ln x dx$ .

2. Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  et l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .

3. Montrer que  $G(x) = x [(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2]$  est une fonction primitive de la fonction  $g(x) = (\ln x)^2$ .

Soit  $t \in ]0; 1[$

4. Calculer les intégrales  $A = \int_t^1 \left(\frac{\ln x}{x}\right) dx$  et  $B = \int_t^1 (\ln x)^2 dx$ .

5. Calculer en fonction de  $t$  le volume  $V(t)$  du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  sur l'intervalle  $[t; 1]$ .

6. Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t)$

### 6-5/ Exercice 5

Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{e^x(1-x)}$  et  $x \in [0; \frac{1}{2}]$

1. Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; \frac{1}{2}]$

2. En déduire que :  $(\forall x \in [0; \frac{1}{2}]) : 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$

3. Vérifier que :  $(\forall x \in [0; \frac{1}{2}]) : 1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

4. Montrer que :  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{e^x(1-x)}$

5. Calculer :  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$

6. Montrer que :  $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$

### 6-6/ Exercice 6

Pour tout réel positif  $a$ , on définit  $I(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{x^2} dx$ .

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $I(a) = -\frac{\ln(a)+1}{a} + 1$ .
2. En déduire la limite de  $I(a)$  quand  $a$  tend vers  $+\infty$ .

On définit maintenant  $J(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{x^2+1} dx$ .

3. Vérifier que  $(\forall x \geq 1) : x^2 \leq x^2 + 1 \leq 2x^2$ , puis montrer que  $\frac{1}{2}I(a) \leq J(a) \leq I(a)$ .