

### Exercice 1 (9 pts)

1. Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1 - \frac{2}{1+e^x}$$

2. Simplifier le nombre :

$$E = \frac{e^{1-\ln 2}}{e^{1+\ln 2}}$$

3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et les inéquations suivantes :

$$\textcircled{1} e^{\frac{1}{x}} = e^x$$

$$\textcircled{2} 3e^{2x} - e^x - 2 = 0$$

$$\textcircled{3} 2^{x+1} = 8$$

$$\textcircled{4} 1 - 2e^x < 0$$

4. Calculer les limites suivantes :

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + 2 =$$

$$C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} =$$

$$E = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x)e^{2x} =$$

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - e^{-x} + 4 =$$

$$D = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} =$$

$$F = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+x^2} =$$

### Exercice 2 (5 pts)

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - 4z + 8 = 0$

On considère dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé directe  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectivement :  $a = 2 + 2i$ ,  $b = 2 - 2i$ ,  $c = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  et  $d = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$ .

2. Écrire chacun des nombres  $b$  et  $c$  sous la forme trigonométrique.

3. Vérifier que  $bc = d$ .

4. Déduire l'argument du nombre complexe  $d$ .

Soit le point  $E$  l'image du point  $B$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

5. Montrer que l'affixe du point  $E$  est  $e = -2 - 2i$  puis montrer que le triangle  $ABE$  est rectangle et isocèle en  $B$ .

### III- Exercice 3 (6 pts)

#### Partie 1

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = e^x - x$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .
2. Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , puis donner le tableau de variation de  $g$ .
3. Dédire que  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) > 0$ .

## Partie 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2e^x - x^2 - 1$

Soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

4. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .
5. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  (Remarquer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x^2 \left( 2\frac{e^x}{x^2} - 1 \right) - 1$ ).
6. Déterminer les branches infinies de  $(C_f)$ .
7. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 2g(x)$ .
8. Donner le tableau de variation de  $f$ .
9. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans l'intervalle  $] -0,6 ; -0,3[$ .
10. Représenter  $(C_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .