

Sommaire**I- Fonction exponentielle népérienne**

1-1/ Définition

1-2/ Conséquence

1-3/ Propriétés

1-4/ Propriétés algébriques

1-5/ Courbe représentative de la fonction exponentielle

1-6/ Limites usuelles

1-7/ Dérivée de la fonction exponentielle

**II- Exponentielle de base  $a$** 

2-1/ Définition

2-2/ Propriété

2-3/ Étude de la fonction exponentielle de base  $a$ 2-4/ Dérivée de la fonction exponentielle de base  $a$ 

2-5/ Tableau de variations

2-6/ Courbes

**III- Exercices**

3-1/ Exercice 1

3-2/ Exercice 2

3-3/ Exercice 3

3-4/ Exercice 4

---

**I- Fonction exponentielle népérienne**

1-1/ Définition

On appelle fonction exponentielle népérienne notée  $\text{Exp}$ , la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\rightarrow ]0, +\infty[ \\ x &\rightarrow \exp(x) \end{aligned}$$

## 1-2/ Conséquence

- Les fonctions Ln et exp sont des fonctions réciproques l'une de l'autre, pour tout  $x > 0$  et pour tout réel  $y$  :

$$\ln(x) = y \Leftrightarrow \exp(y) = x$$

- Pour tout réel  $x$  on écrit aussi :  $\forall x \in \mathbb{R}$  :

## Exemple

### 1-3/ Propriétés

$$\begin{aligned} e^0 &= 1 \text{ et } e^1 = e \\ e^{-1} &= \frac{1}{e} \text{ et } \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \ln(e^x) = x$$

$$(\forall x > 0) ; e^{\ln x} = x$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y > 0) ; \ln y = x \Leftrightarrow e^x = y$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) ; e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) ; e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$$

### 1-4/ Propriétés algébriques

Pour tous réels  $x$  et  $y$  et pour tout nombre rationnel  $r \in \mathbb{Q}$  on a :

$$e^x \times e^y = e^{x+y}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

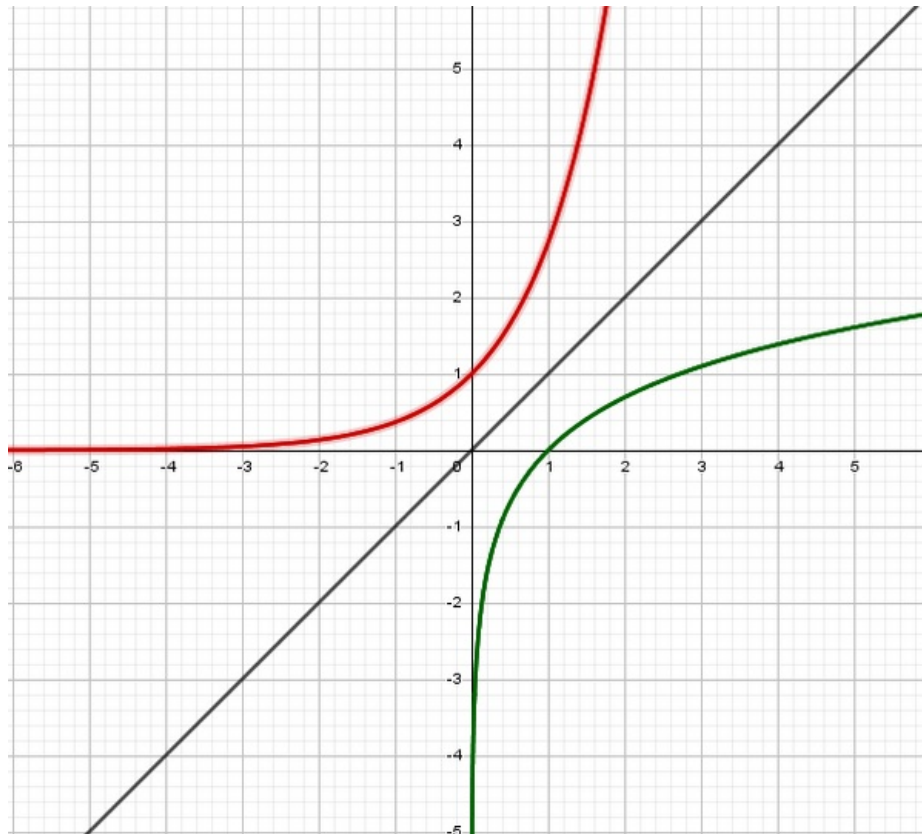
$$(e^x)^r = e^{xr}$$

### 1-5/ Courbe représentative de la fonction exponentielle

On a vu que la fonction exponentielle népérienne est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Donc la courbe de la fonction  $\exp$  notée  $\mathcal{C}_{\exp}$  et la courbe de la fonction  $\ln$  notée  $\mathcal{C}_{\ln}$  sont symétriques par rapport à la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$ , bien entendu, dans un repère orthonormal

La figure ci-dessous donne les représentations graphiques des deux fonctions :



## I- Fonction exponentielle népérienne

### 1-6/ Limites usuelles

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} &= +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x &= 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \end{aligned}$$

### 1-7/ Dérivée de la fonction exponentielle

#### Propriété

la fonction  $x \mapsto e^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $(\forall x \in \mathbb{R}) (e^x)' = e^x$ .

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Alors  $x \mapsto e^x$  est dérivable sur  $I$  et  $(\forall x \in \mathbb{R}) (e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$

#### Remarque

Soit  $U$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Les primitives sur  $I$  de la fonction  $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$  sont les fonctions  $x \mapsto e^{u(x)} + \lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

## Exemple

## II- Exponentielle de base $a$

### 2-1/ Définition

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1.

On appelle fonction exponentielle de base  $a$ , la fonction  $\exp_a$  qui à tout réel  $x$  associe le réel  $a^x$  tel que  $\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$ .

### Remarque

L'ensemble de définition de  $a^x$  est  $\mathbb{R}$ , l'exigence de stricte positivité et différent de 1 ne porte que sur  $a$  et l'égalité  $a^x = e^{x \ln(a)}$  permet de comprendre pourquoi (condition d'existence d'un logarithme).

Lorsque  $a = e$ , on retrouve la fonction  $\exp$ .

Pour tout réel strictement positif  $a$  et différent de 1, et pour tout réel  $x$ , on a  $a^x > 0$

Pour tout réel strictement positif  $a$  et différent de 1, et pour tout réel  $x$ , on a  $\ln(a^x) = x \ln(a)$

### Exemple

### 2-2/ Propriété

Pour tous nombres réel strictement positifs  $a$  et  $b$ , et pour tous réel  $x$  et  $y$  on a :

$$a^0 = 1 \quad ; \quad a^1 = a \quad ; \quad a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$a^x \times b^x = (a \times b)^x \quad ; \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad ; \quad \frac{1}{a^x} = a^{-x}$$

## II- Exponentielle de base $a$

### 2-3/ Dérivée de la fonction exponentielle de base $a$

#### Propriété

Soit  $a$  un réel strictement positif.

La fonction exponentielle de base  $a$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , et pour tout réel  $x$  on a :

$$(a^x)' = e^{x \ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$$

#### Exemple

### 2-4/ Tableau de variations

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1.

**Cas 1 :  $0 < a < 1$**

Alors,  $\ln(a) < 0$  d'où  $(a^x)' < 0$ , donc la fonction  $x \mapsto a^x$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

De plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(a)} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln(a)} = +\infty$ .

|          |           |           |
|----------|-----------|-----------|
| $x$      | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $(a^x)'$ | -         |           |
| $a^x$    | $+\infty$ | $0$       |

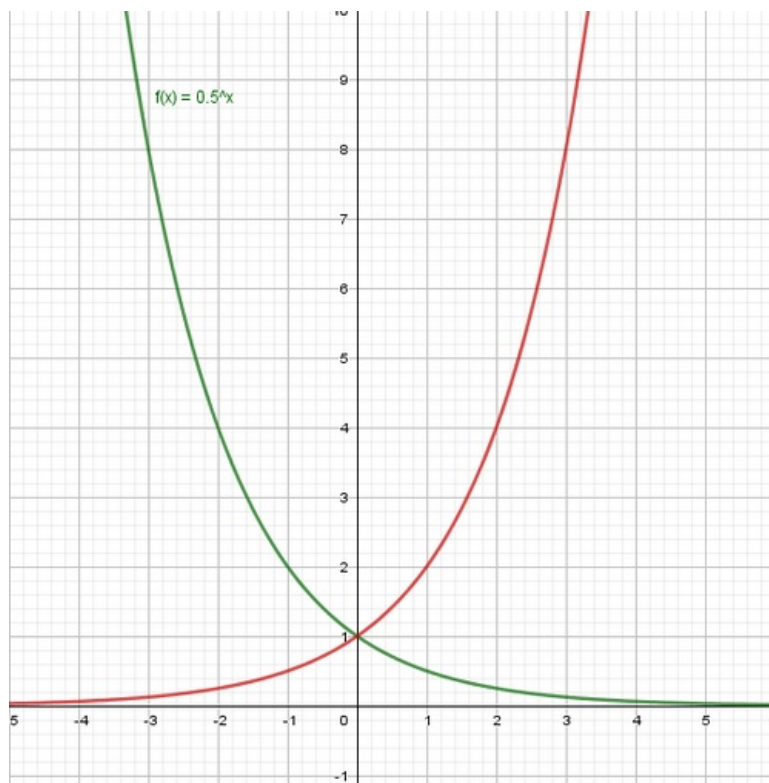
### Cas 2 : $a > 1$

Alors,  $\ln(a) > 0$  d'où  $(a^x)' > 0$ , donc la fonction  $x \mapsto a^x$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

De plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(a)} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln(a)} = 0$ .

|          |           |           |
|----------|-----------|-----------|
| $x$      | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $(a^x)'$ | +         |           |
| $a^x$    | $0$       | $+\infty$ |

## 2-5/ Les représentations graphiques de $x \mapsto 0,5^x$ et $x \mapsto 2^x$



## III- Exercices

### 3-1/ Exercice 1

#### Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction numérique  $g$  d'une variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = e^x (x - 1) + 1$$

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $g'(x) = xe^x$ .
2. Étudier le signe de  $g'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

- Calculer  $g(0)$  et dresser le tableau de variations de  $g$  (le calcul de limites n'est pas demandé).
- Déduire que  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

## Partie B - Étude de la fonction

Soit  $f$  la fonction numérique d'une variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = xe^x - 2e^x + x$$

On appelle  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique  $2cm$ .

- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  puis interpréter géométriquement ce résultat.
- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  (on rappelle que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ )
- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  et que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$ , puis interpréter géométriquement ce résultat.
- Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $f'(x) = g(x)$ .
- Déduire le signe de  $f'(x)$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .
- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  telle que  $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ .
- Montrer que  $f''(x) = xe^x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et en déduire que la courbe  $(C_f)$  admet un point d'inflexion  $I(0; -2)$ .

### 3-2/ Exercice 2

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x - 2 - e^{-x}$

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- Montrer que la droite  $(\Delta) : y = x - 2$  est une asymptote oblique à  $(C_f)$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .
- Vérifier que  $f(x) = x \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{xe^x}\right)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ .
- Déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  puis interpréter le résultat.
- Étudier la position relative de  $(C_f)$  et la droite  $(\Delta) : y = x - 2$ .
- Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- Donner le tableau de variations de  $f$ .
- Tracer  $(C_f)$ .

### 3-3/ Exercice 3

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x - 1)^2 e^x$

soit  $(C_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  puis interpréter géométriquement le résultat.
3. Vérifier que  $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 x^2 e^x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ .
4. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  puis interpréter géométriquement le résultat.
5. Montrer que  $f'(x) = (x^2 - 1)e^x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
6. Étudier le signe de  $f'(x)$  sur  $\mathbb{R}$  puis calculer  $f(-1)$  et  $f(1)$  et dresser le tableau de variation de  $f$ .
7. Montrer que  $F$  définie par  $F(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$  est une fonction primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
8. tracer  $(C_f)$
9. Déterminer géométriquement le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 1$ .

### 3-4/ Exercice 4

#### Partie I

Soit la fonction numérique  $g$  d'une variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 2 + xe^x$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .
2. Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  puis déduire le signe.
3. En déduire que  $g(x) > 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### Partie II

Soit  $f$  la fonction numérique d'une variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x + (x - 1)e^x$

Et soit  $(C_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé

$$\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right).$$

4. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = 0$ , puis interpréter géométriquement le résultat.
5. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ , puis interpréter géométriquement le résultat.
6. Étudier la position relative de la droite  $(\Delta) : y = 2x$  et  $(C_f)$ .
7. Montrer que  $f'(x) = g(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
8. Étudier le signe de  $f'(x)$  puis donner le tableau de variation de la fonction  $f$ .
9. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
10. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  tel que  $0 < \alpha < 1$ .
11. Tracer  $(C_f)$  et  $(\Delta)$ .