Mathématiques : 2 Bac SPC-SVT-STE-STM

Séance 11 (Nombres complexes – Partie 2)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Écriture exponentielle d'un nombre complexe non nul

1-1/ Définition

L'écriture trigonométrique $z = [r, \alpha] = [|z|, argz]$ sera notée de la manière suivante :

$$z=[r,\alpha]=r\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)=re^{i\alpha}$$

$z=re^{i\alpha}$ s'appelle l'écriture exponentielle ou la forme exponentielle de z non nul

Propriétés

Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\left(e^{i\alpha}\right)^n&=e^{in\alpha}\\ \tfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}&=e^{i(\alpha-\beta)}\\ \tfrac{1}{e^{i\beta}}&=e^{-i\beta}\\ e^{i\alpha}\times e^{i\beta}&=e^{i(\alpha+\beta)}\end{aligned}$$

1-2/ Formules d'EULER

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$

On pose $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ $z=[1,\alpha]=\cos\alpha+i\sin\alpha$un nombre complexe de module 1 et d'argument α.

Donc $z=\cos\alpha+i\sin\alpha=re^{i\alpha}$

Les formules d'Euler :

$$\begin{cases}\cos\alpha=\frac{z+\overline{z}}{2}=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{z-\overline{z}}{2i}=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned}e^{in\alpha}+e^{-in\alpha}&=z^n+\left(\overline{z}\right)^n=2\cos n\alpha\\ e^{in\alpha}-e^{-in\alpha}&=z^n-\left(\overline{z}\right)^n=2i\sin n\alpha\\ e^{in\alpha}\times e^{-in\alpha}&=z^n\times\left(\overline{z}\right)^n=1\end{aligned}$$

1-3/ Application (La linéarisation)

On linéarise $\cos^3 x$.

II- Équation du deuxième degré

2-1/ Équation de la forme $z^2=a\,;\ (z\in\mathbb{C})\ (a\in\mathbb{R})$

Soit $a\in\mathbb{R}$

L'ensemble des solutions de l'équation $z\in\mathbb{C}\ :\ z^2=a$ est :

- Si $a=0$ alors $S=\{0\}$.

- Si $a>0$ alors $S=\left\{\sqrt{a},-\sqrt{a}\right\}$.

- Si $a<0$ alors $S=\left\{i\sqrt{-a},-i\sqrt{-a}\right\}$.

Exemple

2-2/ Équation de la forme $az^2+bz+c=0\,;\ (z\in\mathbb{C})\ (a\in\mathbb{R}^*)\ (b,c\in\mathbb{R})$

$\Delta=b^2-4ac$ a pour solutions :

- Si $\Delta=0$ alors l'équation a une solution double $z=\frac{-b}{2a}$

- Si $\Delta>0$ alors l'équation à deux solutions réelles $z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation a deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

III- Écriture complexe des transformations (translation – homothétie – rotation)

3-1/ Écriture complexe d'une translation

L'écriture complexe de la translation $f = t_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe le complexe b est $z' - z = b$ ou bien $z' = z + b$.

Toute transformation f dans le plan complexe qui transforme $M_{(z)}$ au point $M'_{(z')}$ tel que : $z' = z + b$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe le complexe b.

3-2/ Écriture complexe d'une homothétie

L'écriture complexe de l'homothétie $f = h(\Omega, k)$ de centre le point Ω et de rapport $k \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ est $z' - \omega = k\,(z - \omega)$ ou bien $z' = kz + b$ avec $b = \omega - k$ $(\omega \in \mathbb{C})$.

Toute transformation f dans le plan complexe qui transforme $M_{(z)}$ au point $M'_{(z')}$ tel que : $z' = kz + b$ est une homothétie :

- De centre le point $\Omega_{(\omega)}$, Ω est un point invariant par f c.à.d. $f\,(\Omega) = \Omega$ ou $\omega = k\omega + b$, d'où $\omega = \frac{b}{1-k}$

- De rapport $k \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

3-3/ Écriture complexe d'une rotation

L'écriture complexe de la rotation $f = r(\Omega, \theta)$ de centre le point Ω et d'angle θ est $z' - \omega = e^{i\theta}\,(z - \omega)$ ou bien $z' = ze^{i\theta} + b$ avec $b = \omega - \omega e^{i\theta} \in \mathbb{C}$.

Toute transformation f dans le plan complexe qui transforme $M_{(z)}$ au point $M'_{(z')}$ tel que $z' = kz + b$ avec $a \neq 1$ et $|a| = 1$ (ou $z' = ze^{i\theta} + b$) est une rotation :

- De centre le point $\Omega_{(\omega)}$, Ω est un point invariant par f c.à.d. $\omega = a\omega + b$ (ou $\omega = e^{i\theta}\omega + b$), d'où : $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-e^{i\theta}}$.

- D'angle $arg\,(a)$ (2π) (ou $\theta = arg\left(e^{i\theta}\right)$ (2π)) ou encore $\theta = arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right)$ (2π).

IV- La géométrie plane et les nombres complexes

Relation complexe	Signification géométrique
L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\lvert z - z_A\rvert = \lvert z - z_B\rvert$	$AM = BM$. M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$. L'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[AB]$.
$\lvert z - z_A\rvert = k$ $(k > 0)$	$AM = k$. M appartient au cercle de centre A et de rayon k.

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm\frac{\pi}{2}\right] = re^{\pm\frac{\pi}{2}i}$	Si $r \in \mathbb{R}* - \{1\}$, alors ABC est un triangle rectangle en A. Si $r = 1$, alors ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.
$\left\lvert\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right\rvert = 1$	ABC est un triangle isocèle en A.
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm\frac{\pi}{3}\right] = e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$	ABC est un triangle équilatéral.

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 - z\sqrt{2} + 2 = 0$.

On considère le nombre complexe $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$.

2. Montrer que le module de u est $\sqrt{2}$ et que $arg\,(u) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
3. En utilisant l'écriture de u sous forme trigonométrique, montrer que u^6 est un nombre réel.

Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les

points A et B d'affixes respectives $a = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $b = 8$.

Soit z l'affixe du point M et z' l'affixe du point M', l'image de M par la rotation R de centre le point O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

4. Exprimer z' en fonction de z.
5. Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R, et en déduire que le triangle OAB est équilatéral.

5-2/ Exercice 2

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 - 4z + 5 = 0$

Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives $a = 2 + i$, $b = 2 - i$, $c = i$, $d = -i$ et $\omega = 1$.

2. Montrer que $\frac{a-\omega}{b-\omega} = i$.
3. En déduire que le triangle ΩAB est rectangle isocèle en Ω.

Soit z l'affixe du point M et z' l'affixe du point M', l'image de M par la rotation R de centre le point Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

4. Montrer que $z' = iz + 1 - i$.
5. Vérifier que $R\,(A) = C$ et $R\,(D) = B$.
6. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre.

5-3/ Exercice 3

On considère le nombre complexe a tel que : $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

1. Montrer que le module de a est $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$.
2. Vérifier que $a = 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right) + 2i\sin\frac{\pi}{4}$.
3. Par la linéarisation de $\cos^2\theta$ tel que θ est un nombre réel, montrer que $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$.
4. Montrer que $a = 4\cos^2\frac{\pi}{8} + 4i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$ (on rappelle que $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$).
5. Montrer que $4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ est la forme trigonométrique du nombre a puis montrer que $a^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$.

Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points Ω et A d'affixes respectives $\omega = \sqrt{2}$ et $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, et la rotation R de centre le point Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

6. Montrer que l'affixe b du point B est l'image du point A par la rotation R est égale à $2i$.
7. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifient $|z - 2i| = 2$.

5-4/ Exercice 4

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 + 10z + 26 = 0$.

Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives $a = -2 + 2i$, $b = -5 + i$, $c = -5 - i$ et $\omega = -3$.

2. Montrer que $\frac{b-\omega}{a-\omega} = i$.
3. En déduire la nature du triangle ΩAB.

Soit le point D l'image du point C par la translation T de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $6 + 4i$.

4. Montrer que l'affixe d du point D est $1 + 3i$.
5. Montrer que $\frac{b-d}{a-d} = 2$, puis en déduire que le point A est le milieu du segment $[BD]$.

5-5/ Exercice 5

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 12z + 61 = 0$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 6 - 5i$, $b = 4 - 2i$ et $c = 2 + i$.

2. Calculer $\frac{a-c}{b-c}$, et en déduire que A, B et C sont alignés.

On considère la translation T de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $1 + 5i$.

3. Vérifier que l'affixe du point D image du point C par la translation T est $d = 3 + 6i$.
4. Montrer que $\frac{d-c}{b-c} = -1 + i$, et que $\frac{3\pi}{4}$ est un argument de $-1 + i$.
5. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}\right)$.

5-6/ Exercice 6

On considère les nombres complexes a et b tels que $a=\sqrt{3}+i$ et $b=\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i$.

1. Vérifier que : $b=(1+i)a$
2. En déduire que $|b|=2\sqrt{2}$, et que $arg b=\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.
3. Déduire de ce qui précède que $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère les points A et B d'affixes respectives a et b et le point C d'affixe $c=-1+i\sqrt{3}$

.

4. Vérifier que $c=ia$, et en déduire que $OA=OC$ et que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
5. Montrer que le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.
6. En déduire que le quadrilatère $OABC$ est un carré.