Mathématiques : 3ème Année Collège

Séance 11 (Vecteurs et translation)

Professeur : Mr BENGHANI Youssef

Sommaire

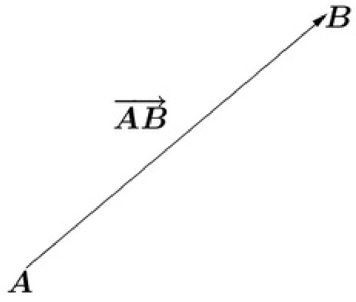
I- Les vecteurs

1-1/ Vocabulaire

Définition

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par trois composantes :

- La direction : la direction de la droite (AB)
- Le sens : de A vers B
- La Longueur : la distance AB



Remarque

Tout point A définit un vecteur nul noté $\overrightarrow{0}$, on écrit : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

1-2/ Égalité de deux vecteurs

Propriété

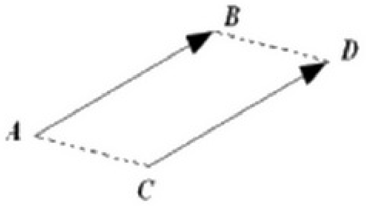
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction : $(AB) \parallel (CD)$
- A$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même longueur : $AB = CD$

Remarque

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ tel que les points ne sont pas alignés, alors le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

Exemple



1-3/ Vecteur opposé

Définition

Le vecteur opposé d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, et on écrit : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Remarque

Deux vecteurs opposés ont la même direction et même longueur, mais ils ont des sens opposés.

Exemple

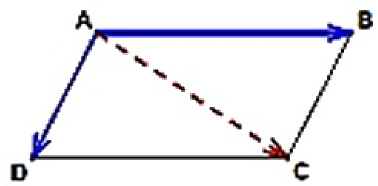
1-4/ Somme de deux vecteurs

Définition

La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

On écrit : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Exemple



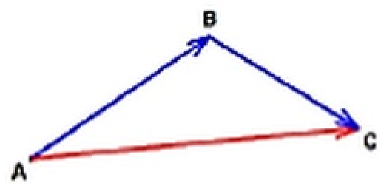
1-5/ Relation de Chasles

Propriété

Pour tous les points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

C'est appelé : Relation de Chasles

Exemple



1-6/ Produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition

Soit k un nombre réel et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le nombre réel k si $C \in (AB)$ tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

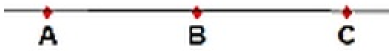
- Si $k > 0$ alors $AC = \ k.AB$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont le même sens.
- Si $k < 0$ alors $AC = \ k.AB$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont des sens contraires.

Exemple

1-7/ Propriété des points alignés et des droites parallèles

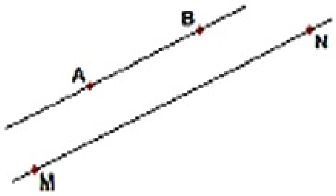
Propriété 1

Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors A, B et C sont des points alignés.



Propriété 2

Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{MN}$ alors $(AB) \parallel (MN)$, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.



Exemple

1-8/ Vecteur et milieu d'un segment

Propriété

A, B et M sont des points.

M est le milieu de $[AB]$ signifie que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB} \end{cases}$$

Exemple

II- La translation

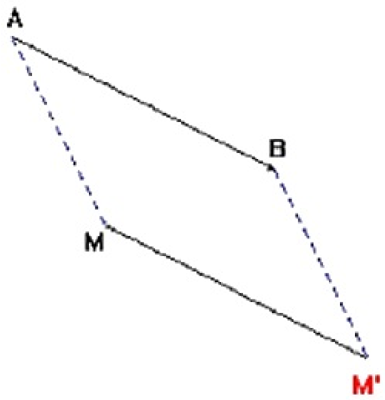
2-1/ Image d'un point par une translation

Définition

A et B sont deux points distincts.

M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B signifie que :

- $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$
- $ABM'M$ est un parallélogramme



Remarque

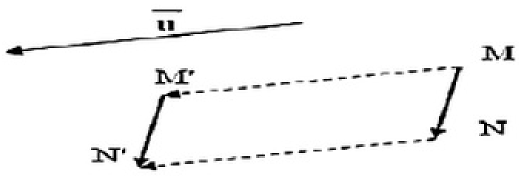
Si $M \in (AB)$ alors M' l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ appartient à la droite (AB).

Propriété

Soient M et N deux points du plan.

Si M' et N' sont les images respectives des points M et N par une translation, alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

Exemple



2-2/ Image des figures usuelles par une translation

Propriété

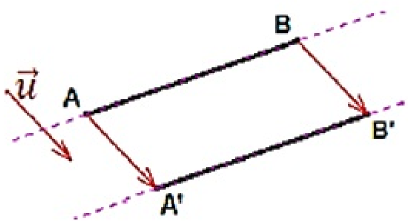
L'image d'une droite (AB) par une translation est une droite $(A'B')$ parallèle à (AB).

Exemple

Propriété

L'image d'un segment $[AB]$ par une translation est un segment $[A'B']$ de même longueur.

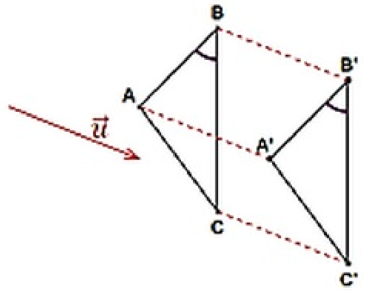
Exemple



Propriété

L'image d'un angle $\widehat{ABC}$ par une translation est un angle $\widehat{A'B'C'}$ de même mesure.

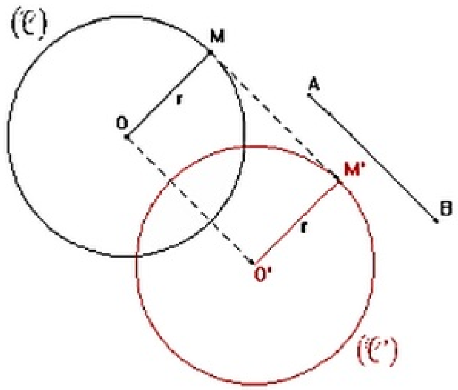
Exemple



Propriété

L'image d'un cercle $(\mathscr{C})$ par une translation est un cercle $(\mathscr{C}')$ de même rayon.

Exemple



III- Exercices

3-1/ Exercice 1

Exprimer le plus simple possible les expressions suivantes :

$$① \ \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} =$$
$$② \ \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} =$$
$$③ \ \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OA} =$$
$$④ \ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} =$$
$$⑤ \ \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} =$$
$$⑥ \ 3\left(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{DA}\right) - 2\left(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{DA}\right) =$$

3-2/ Exercice 2

On considère un triangle ABC.

Construire les points K, L, M et N tel que :

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

3-3/ Exercice 3

ABC est un triangle

1. Construire le point M l'image du point C par la translation qui transforme A en B.
2. Construire le point N tel que : $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
3. Montrer que le point C est le milieu du segment $[MN]$.

3-4/ Exercice 4

EFG est un triangle et le point I est le milieu de $[EG]$ et le point H est le symétrique du point F par rapport au point I.

Soit t la translation qui transforme E en F.

1. Construire le point K l'image de G par la translation t.
2. Montrer que G est l'image de H par la translation t.
3. En déduire que G est le milieu de $[HK]$.

Soit (C) le cercle de diamètre HK.

4. Déterminer l'image du cercle (C) par la translation t.

3-5/ Exercice 5

Soient A, B, C et D des points dans le plan.

1. Prouver que les point B, C et D sont alignés si $5\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.
2. Prouver que les point A, C et D sont alignés si $7\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BD}$.

3-6/ Exercice 6

Soit ABC un triangle.

1. Construire les points D et E tel que $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB}$.
2. Montrer que : $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
3. En déduire que les points A, E et D sont alignés.

3-7/ Exercice 7

EFG est un triangle et O est le milieu de $[FG]$.

On considère t la translation qui transforme E en O.

1. Construire les points A et B tel que A est l'image de F par la translation t et $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EO}$.
2. Prouver que B est l'image de G par la translation t.

3. Déterminer l'image de la droite (EF) par la translation t.
4. Montrer que $\widehat{FEG} = \widehat{AOB}$.

Soit K un point tel que : $\overrightarrow{FK} = -2\overrightarrow{EO}$.

5. Construire le point K.
6. Montrer que les points A, K et F sont alignés.