Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Séance 9 (Fonctions logarithmiques)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Fonction Logarithme Népérien

1-1/ Définition

La fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.

On la note $\ln$

Le domaine de définition de la fonction $\ln$ est $]0,+\infty[$, et $\ln(1) = 0$.

La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$, et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

1-2/ Propositions 1

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. On a alors :

Pour tout $x, y \in]0,+\infty[$, on a
$\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y \; et \; \ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$

Pour tout $x, y \in]0,+\infty[$, on a

$\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
$\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$
$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Exemple

1-3/ Propositions 2

Pour tout $x, y \in]0,+\infty[$, et pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a :

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$
$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$
$$\ln(x^r) = r.\ln(x)$$
$$\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}.\ln(x)$$

1-4/ Propositions 3

L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution dans $]0,+\infty[$. On la note : e

On a : $\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

À l'aide de la calculatrice, on trouve comme valeur approchée de e :
$e = 2,718281828$

On a $\ln(e^r) = r$; $(r \in \mathbb{Q})$

Pour tout $x > 0$, on a $\ln(x) = r \Leftrightarrow x = e^r$

1-5/ Limites Fondamentales

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0\ ;\ \ (r \in \mathbb{N}^*)$$
$$\lim_{x \to 0^+} x^r . \ln(x) = 0\ ;\ \ (r \in \mathbb{N}^*)$$

1-6/ Étude et représentation

Soit D_f le domaine de définition de la fonction ln, On a $D_f = \left]0, +\infty\right[$

Soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, alors la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet l'axe des ordonnées comme asymptote.

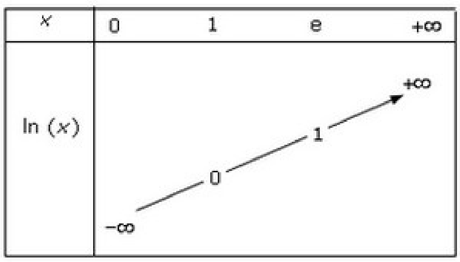
On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$, alors $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses.

Concavité

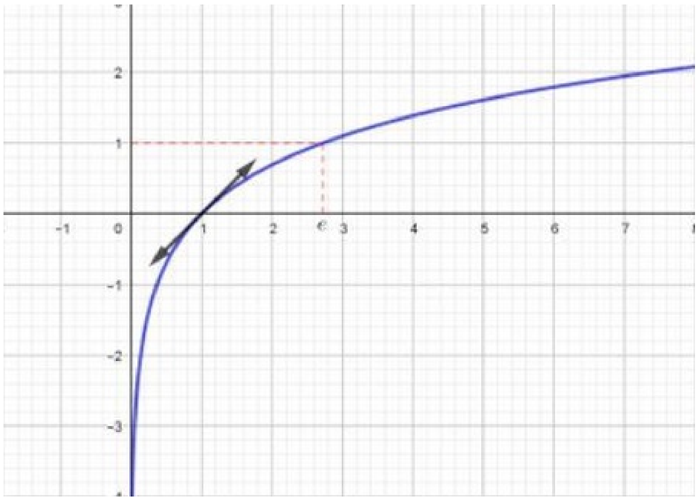
On a $\forall x \in \left]0, +\infty\right[$, $\ln''(x) = \frac{-1}{x^2}$, alors la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ est concave sur $\left]0, +\infty\right[$

De plus $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

Tableau de variations de la fonction $\ln$



Courbe de la fonction $\ln$



1-7/ Dérivée Logarithmique

Proposition 1

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que :
$\forall x \in I\ :\ u(x) \neq 0$

Alors la fonction $x \to \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I, et on a :
$\ln'(|u(x)|) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple

Proposition 2

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que :
$\forall x \in I\ :\ u(x) \neq 0$

Les primitives de la fonction $x \to \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions
$x \to \ln(|u(x)|) + c\ \ (c \in \mathbb{R})$

Exemple

II- Fonction Logarithmique de base a

2-1/ Définition

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction logarithme de base a est la fonction numérique notée par $\log_a(x)$ et définie sur $]0, +\infty[$ par : $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Remarques

La fonction Logarithme de base e est la fonction logarithme népérien car :
$\log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$

On a : $\log_a(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1\ ;\ \ \log_a(1) = 0\ ;\ \ \log_a(a^r) = r$

Exemple

2-2/ Propriétés

Pour tout $x, y \in]0, +\infty[$, et pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a :

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$
$$\log_a(x^r) = r.\log_a(x)$$

II- Fonction Logarithmique de base a

2-2/Étude de la fonction $\log_a$

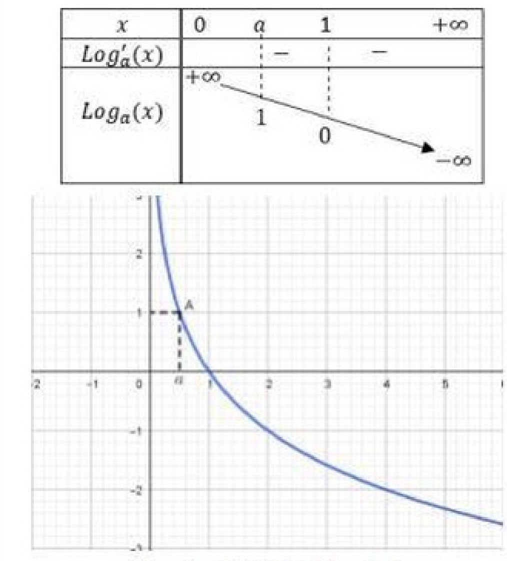
Soit $a \in \mathbb{R}^*{}_+ - \{1\}$

Si $a > 1$, alors la fonction $\log_a$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Si $0 <$��< 1, alors la fonction $\log_a$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

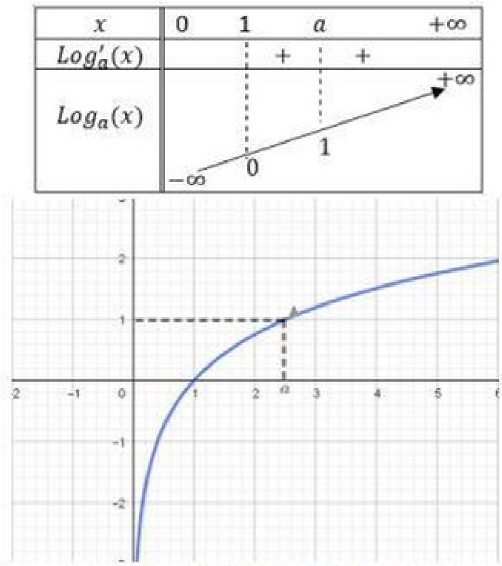
Si $a \in]0,1[$ alors $\ln a < 0$

Et donc : $(\forall x \in]0, +\infty[)\left(Log'_a(x) = \frac{1}{x\ln a} < 0\right)$.



Si $a \in]1, +\infty[$ alors $\ln a > 0$

Et donc : $(\forall x \in]0, +\infty[)\left(Log'_a(x) = \frac{1}{x\ln a} > 0\right)$.



III- Fonction Logarithme décimal

3-1/ Définition

La fonction logarithme décimal est la fonction logarithmique de base 10.

Elle est notée $\log(x)$.

On a : $\forall x \in \left]0, +\infty\right[\ : \ \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

3-2/ Propriétés

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, et pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a :

$$\log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r$$
$$\log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$$
$$\log(x) \leq r \Leftrightarrow x \leq 10^r$$

Exemple

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g(x)=3x^2-6\ln x+6$

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Déduire le signe de g sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=3x-2+\frac{6\ln x}{x}$

Et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
5. Montrer que la droite (Δ) d'équation ��$=3x-2$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
6. Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (Δ).
7. Montrer que $\forall x\in\left]0,+\infty\right[\ :\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$
8. Dresser le tableau de variations de f sur $]0,+\infty[$.
9. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\left[\frac{1}{2},1\right]$.
10. Tracer (Δ) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

4-2/ Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{2x+1+\ln x}{x}$

Et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
3. Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur D_f.
5. Montrer que :$\forall x\in D_f\ :\ f''(x)=\frac{2\ln x-1}{x^2}$
6. Étudier la concavité de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
7. Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

4-3/ Exercice 3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :
$f(x) = \ln^2(x) - \ln(x) + x$

Et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
2. Étudier la branche infinie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
3. Montrer que $\forall x \in \left]0,+\infty\right[\ : \ f'(x) = \frac{x-1+2\ln x}{x}$.
4. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$, et strictement décroissante sur $]0,1[$.
5. Dresser le tableau de variations de f sur $]0,+\infty[$.

On note (D) la droite d'équation $y = x$.

6. Résoudre dans $]0,+\infty[$ l'équation suivante : $\ln(x)(\ln(x) - 1) = 0$
7. Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (D) sur $]0,+\infty[$.
8. Calculer f'' pour tout x de $]0,+\infty[$.
9. Montrer que le point d'abscisse $x = e^{\frac{3}{2}}$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
10. Tracer (D) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \sqrt{e} \\ u_{n+1} = f(u_n)\ ,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

11. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ 1 \leq u_n \leq \sqrt{e}$.
12. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
13. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4-4/ Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. En déduire les asymptotes à sa courbe (C_f).
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer (C_f) ainsi que sa tangente au point d'abscisse e.