



Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Séance 9 (Fonctions logarithmiques)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

### Sommaire

#### I- Fonction Logarithme Népérien

1-1/ Définition

1-2/ Propositions 1

1-3/ Propositions 2

1-4/ Propositions 3

1-5/ Limites Fondamentales

1-6/ Étude et représentation

1-7/ Dérivée Logarithmique

#### II- Fonction Logarithmique de base $a$

2-1/ Définition

2-2/ Propriétés

2-3/ Étude de la fonction  $\log_a$

#### III- Fonction Logarithme décimal

3-1/ Définition

3-2/ Propriétés

#### IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

4-2/ Exercice 2

4-3/ Exercice 3

4-4/ Exercice 4

---

#### I- Fonction Logarithme Népérien

1-1/ Définition

La fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  qui s'annule en 1.

On la note  $\ln$

Le domaine de définition de la fonction  $\ln$  est  $]0, +\infty[$ , et  $\ln(1) = 0$ .

La fonction  $\ln$  est continue et dérivable sur  $]0, +\infty[$ , et  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .

## 1-2/ Propositions 1

La fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ . On a alors :

Pour tout  $x, y \in ]0, +\infty[$ , on a  $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$  et  $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$

Pour tout  $x, y \in ]0, +\infty[$ , on a

$$\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

### Exemple

## 1-3/ Propositions 2

Pour tout  $x, y \in ]0, +\infty[$ , et pour tout  $r \in \mathbb{Q}$  on a :

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

$$\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$$

$$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x)$$

## 1-4/ Propositions 3

L'équation  $\ln(x) = 1$  admet une unique solution dans  $]0, +\infty[$ . On la note :  $e$

On a :  $\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

À l'aide de la calculatrice, on trouve comme valeur approchée de  $e$  :  $e = 2,718281828$

On a  $\ln(e^r) = r$  ; ( $r \in \mathbb{Q}$ )

Pour tout  $x > 0$ , on a  $\ln(x) = r \Leftrightarrow x = e^r$

## 1-5/ Limites Fondamentales

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0 ; (r \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \cdot \ln(x) = 0 ; (r \in \mathbb{N}^*)$$

## 1-6/ Étude et représentation

Soit  $D_f$  le domaine de définition de la fonction  $\ln$ , On a  $D_f = ]0, +\infty[$

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de la fonction  $\ln$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ , alors la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  admet l'axe des ordonnées comme asymptote.

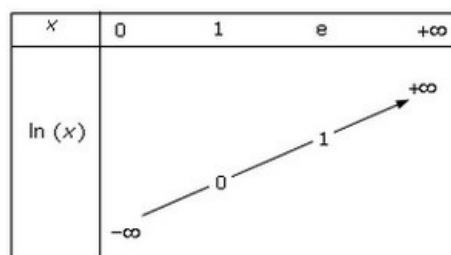
On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ , alors  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses.

### Concavité

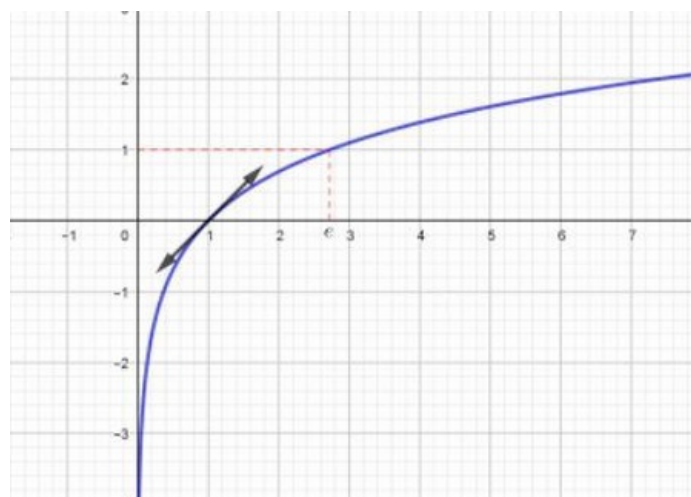
On a  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $\ln''(x) = \frac{-1}{x^2}$ , alors la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  est concave sur  $]0, +\infty[$

De plus  $\ln(1) = 0$  et  $\ln(e) = 1$ .

### Tableau de variations de la fonction $\ln$



### Courbe de la fonction $\ln$



## 1-7/ Dérivée Logarithmique

### Proposition 1

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  telle que :  $\forall x \in I : u(x) \neq 0$

Alors la fonction  $x \rightarrow \ln(|u(x)|)$  est dérivable sur  $I$ , et on a :  $\ln'(|u(x)|) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ .

## Exemple

### Proposition 2

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  telle que :  $\forall x \in I : u(x) \neq 0$

Les primitives de la fonction  $x \rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)}$  sur  $I$  sont les fonctions  $x \rightarrow \ln(|u(x)|) + c$  ( $c \in \mathbb{R}$ )

## Exemple

## II- Fonction Logarithmique de base $a$

### 2-1/ Définition

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction logarithme de base  $a$  est la fonction numérique notée par  $\log_a(x)$  et définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ .

### Remarques

La fonction Logarithme de base  $e$  est la fonction logarithme népérien car :

$$\log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$$

$$\text{On a : } \log_a(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1 ; \log_a(1) = 0 ; \log_a(a^r) = r$$

## Exemple

### 2-2/ Propriétés

Pour tout  $x, y \in ]0, +\infty[$ , et pour tout  $r \in \mathbb{Q}$  on a :

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$$

## II- Fonction Logarithmique de base $a$

### 2-2/ Étude de la fonction $\log_a$

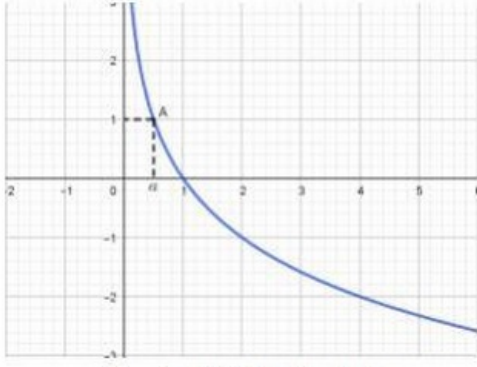
Soit  $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

Si  $a > 1$ , alors la fonction  $\log_a$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

Si  $0 < a < 1$ , alors la fonction  $\log_a$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

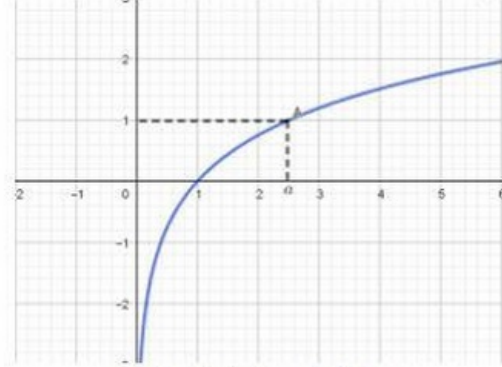
Si  $a \in ]0,1[$  alors  $\ln a < 0$   
 Et donc :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) \left( \text{Log}'_a(x) = \frac{1}{x \ln a} < 0 \right)$ .

$x$	0	$a$	1	$+\infty$
$\text{Log}'_a(x)$		-	-	
$\text{Log}_a(x)$	$+\infty$	1	0	$-\infty$



Si  $a \in ]1, +\infty[$  alors  $\ln a > 0$   
 Et donc :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) \left( \text{Log}'_a(x) = \frac{1}{x \ln a} > 0 \right)$ .

$x$	0	1	$a$	$+\infty$
$\text{Log}'_a(x)$		+	+	
$\text{Log}_a(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



### III- Fonction Logarithme décimal

#### 3-1/ Définition

La fonction logarithme décimal est la fonction logarithmique de base 10.

Elle est notée  $\log(x)$ .

On a :  $\forall x \in ]0, +\infty[ : \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

#### 3-2/ Propriétés

Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , et pour tout  $r \in \mathbb{Q}$  on a :

$$\log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r$$

$$\log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$$

$$\log(x) \leq r \Leftrightarrow x \leq 10^r$$

#### Exemple

### IV- Exercices

#### 4-1/ Exercice 1

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par :  $g(x) = 3x^2 - 6 \ln x + 6$

1. Étudier les variations de la fonction  $g$ .
2. Dédurre le signe de  $g$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = 3x - 2 + \frac{6 \ln x}{x}$

Et soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
4. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

- Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $\diamond\diamond = 3x - 2$  est une asymptote oblique à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $+\infty$ .
- Étudier la position relative de  $(\mathcal{C}_f)$  par rapport à  $(\Delta)$ .
- Montrer que  $\forall x \in ]0, +\infty[ : f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
- Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $[\frac{1}{2}, 1]$ .
- Tracer  $(\Delta)$  et la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

## 4-2/ Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{2x+1+\ln x}{x}$

Et soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$ .
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- Étudier les branches infinies de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .
- Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $D_f$ .
- Montrer que  $\forall x \in D_f : f''(x) = \frac{2\ln x - 1}{x^2}$
- Étudier la concavité de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .
- Tracer  $(\mathcal{C}_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

## 4-3/ Exercice 3

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \ln^2(x) - \ln(x) + x$

Et soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- Étudier la branche infinie de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $+\infty$ .
- Montrer que  $\forall x \in ]0, +\infty[ : f'(x) = \frac{x-1+2\ln x}{x}$ .
- Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]1, +\infty[$ , et strictement décroissante sur  $]0, 1[$ .
- Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

On note  $(D)$  la droite d'équation  $y = x$ .

- Résoudre dans  $]0, +\infty[$  l'équation suivante :  $\ln(x)(\ln(x) - 1) = 0$
- Étudier la position relative de  $(\mathcal{C}_f)$  par rapport à  $(D)$  sur  $]0, +\infty[$ .
- Calculer  $f''$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ .
- Montrer que le point d'abscisse  $x = e^{\frac{3}{2}}$  est un point d'inflexion de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .

10. Tracer  $(D)$  et la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{e} \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

11. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}; 1 \leq u_n \leq \sqrt{e}$ .

12. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

13. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

#### 4-4/ Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

1. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition.

2. En déduire les asymptotes à sa courbe  $(C_f)$ .

3. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4. Tracer  $(C_f)$  ainsi que sa tangente au point d'abscisse  $e$ .