



Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Séance 9 (Fonctions logarithmiques)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Fonction Logarithme Népérien

1-1/ Définition

1-2/ Propositions 1

1-3/ Propositions 2

1-4/ Propositions 3

1-5/ Limites Fondamentales

1-6/ Étude et représentation

1-7/ Dérivée Logarithmique

II- Fonction Logarithmique de base a

2-1/ Définition

2-2/ Propriétés

2-3/ Étude de la fonction \log_a

III- Fonction Logarithme décimal

3-1/ Définition

3-2/ Propriétés

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

4-2/ Exercice 2

4-3/ Exercice 3

4-4/ Exercice 4

I- Fonction Logarithme Népérien

1-1/ Définition

La fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

On la note \ln

Le domaine de définition de la fonction \ln est $]0, +\infty[$, et $\ln(1) = 0$.

La fonction \ln est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

1-2/ Propositions 1

La fonction \ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On a alors :

Pour tout $x, y \in]0, +\infty[$, on a $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$ et $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$

Pour tout $x, y \in]0, +\infty[$, on a

$$\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Exemple

1-3/ Propositions 2

Pour tout $x, y \in]0, +\infty[$, et pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a :

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

$$\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$$

$$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x)$$

1-4/ Propositions 3

L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$. On la note : e

On a : $\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

À l'aide de la calculatrice, on trouve comme valeur approchée de e : $e = 2,718281828$

On a $\ln(e^r) = r$; ($r \in \mathbb{Q}$)

Pour tout $x > 0$, on a $\ln(x) = r \Leftrightarrow x = e^r$

1-5/ Limites Fondamentales

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0 ; (r \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \cdot \ln(x) = 0 ; (r \in \mathbb{N}^*)$$

1-6/ Étude et représentation

Soit D_f le domaine de définition de la fonction \ln , On a $D_f =]0, +\infty[$

Soit (\mathcal{C}_f) la courbe représentative de la fonction \ln dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, alors la courbe (\mathcal{C}_f) admet l'axe des ordonnées comme asymptote.

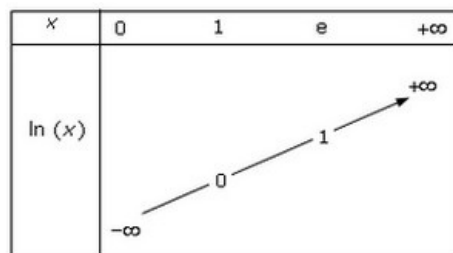
On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, alors (\mathcal{C}_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses.

Concavité

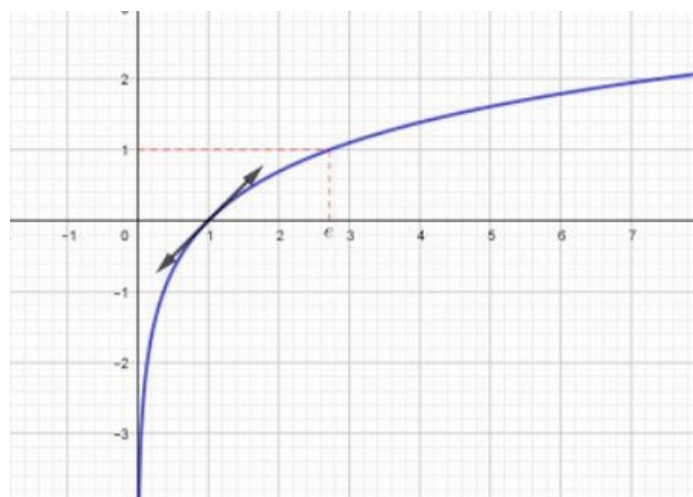
On a $\forall x \in]0, +\infty[$, $\ln''(x) = \frac{-1}{x^2}$, alors la courbe (\mathcal{C}_f) est concave sur $]0, +\infty[$

De plus $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

Tableau de variations de la fonction \ln



Courbe de la fonction \ln



1-7/ Dérivée Logarithmique

Proposition 1

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} telle que : $\forall x \in I : u(x) \neq 0$

Alors la fonction $x \rightarrow \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I , et on a : $\ln'(|u(x)|) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple

Proposition 2

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} telle que : $\forall x \in I : u(x) \neq 0$

Les primitives de la fonction $x \rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \rightarrow \ln(|u(x)|) + c$ ($c \in \mathbb{R}$)

Exemple

II- Fonction Logarithmique de base a

2-1/ Définition

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction logarithme de base a est la fonction numérique notée par $\log_a(x)$ et définie sur $]0, +\infty[$ par : $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Remarques

La fonction Logarithme de base e est la fonction logarithme népérien car :

$$\log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$$

$$\text{On a : } \log_a(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1 ; \log_a(1) = 0 ; \log_a(a^r) = r$$

Exemple

2-2/ Propriétés

Pour tout $x, y \in]0, +\infty[$, et pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a :

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$$

II- Fonction Logarithmique de base a

2-2/ Étude de la fonction \log_a

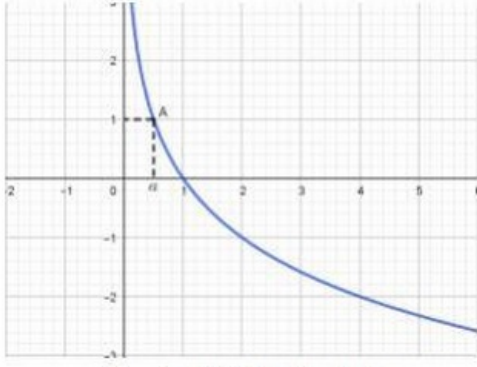
Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

Si $a > 1$, alors la fonction \log_a est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Si $0 < a < 1$, alors la fonction \log_a est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

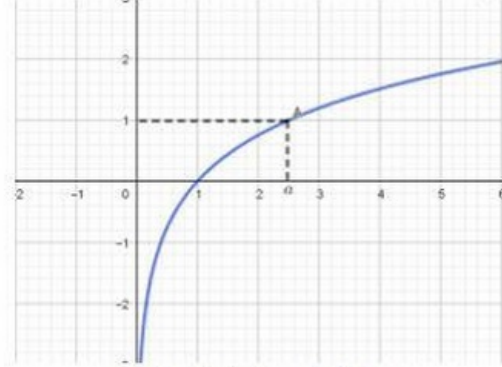
Si $a \in]0,1[$ alors $\ln a < 0$
 Et donc : $(\forall x \in]0, +\infty[) (Log'_a(x) = \frac{1}{x \ln a} < 0)$.

x	0	a	1	$+\infty$
$Log'_a(x)$		-	-	
$Log_a(x)$	$+\infty$	1	0	$-\infty$



Si $a \in]1, +\infty[$ alors $\ln a > 0$
 Et donc : $(\forall x \in]0, +\infty[) (Log'_a(x) = \frac{1}{x \ln a} > 0)$.

x	0	1	a	$+\infty$
$Log'_a(x)$		+	+	
$Log_a(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



III- Fonction Logarithme décimal

3-1/ Définition

La fonction logarithme décimal est la fonction logarithmique de base 10.

Elle est notée $\log(x)$.

On a : $\forall x \in]0, +\infty[: \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

3-2/ Propriétés

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, et pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a :

$$\log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r$$

$$\log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$$

$$\log(x) \leq r \Leftrightarrow x \leq 10^r$$

Exemple

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 3x^2 - 6 \ln x + 6$

1. Étudier les variations de la fonction g .
2. Dédurre le signe de g sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 3x - 2 + \frac{6 \ln x}{x}$

Et soit (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- Montrer que la droite (Δ) d'équation $\diamond\diamond = 3x - 2$ est une asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$.
- Étudier la position relative de (\mathcal{C}_f) par rapport à (Δ) .
- Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
- Dresser le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[\frac{1}{2}, 1]$.
- Tracer (Δ) et la courbe (\mathcal{C}_f) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

4-2/ Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x+1+\ln x}{x}$

Et soit (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .
- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Étudier les branches infinies de la courbe (\mathcal{C}_f) .
- Dresser le tableau de variations de f sur D_f .
- Montrer que $\forall x \in D_f : f''(x) = \frac{2\ln x - 1}{x^2}$
- Étudier la concavité de la courbe (\mathcal{C}_f) .
- Tracer (\mathcal{C}_f) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

4-3/ Exercice 3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \ln^2(x) - \ln(x) + x$

Et soit (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- Étudier la branche infinie de la courbe (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$.
- Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{x-1+2\ln x}{x}$.
- Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$, et strictement décroissante sur $]0, 1[$.
- Dresser le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$.

On note (D) la droite d'équation $y = x$.

- Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation suivante : $\ln(x)(\ln(x) - 1) = 0$
- Étudier la position relative de (\mathcal{C}_f) par rapport à (D) sur $]0, +\infty[$.
- Calculer f'' pour tout x de $]0, +\infty[$.
- Montrer que le point d'abscisse $x = e^{\frac{3}{2}}$ est un point d'inflexion de la courbe (\mathcal{C}_f) .

10. Tracer (D) et la courbe (\mathcal{C}_f) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère la suite numérique (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{e} \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

11. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; 1 \leq u_n \leq \sqrt{e}$.

12. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

13. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4-4/ Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

2. En déduire les asymptotes à sa courbe (C_f) .

3. Dresser le tableau de variation de f .

4. Tracer (C_f) ainsi que sa tangente au point d'abscisse e .