

SommaireI- La fonction exponentielle népérienne  $f(x) = e^x$ 

1-1/ Définition

1-2/ Conséquences

1-3/ Propriétés

## II- Propriétés algébriques

## III- Limites

IV- Dérivée des fonctions  $f(x) = e^x$  et  $f(x) = e^{u(x)}$ 

4-1/ Théorème 1

4-2/ Théorème 2

V- Étude de la fonction  $f(x) = e^x$ VI- Fonction exponentielle de base  $a$  avec  $a \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ 

6-1/ Définition

6-2/ Remarques

6-3/ Conséquences

6-4/ Propriétés

6-5/ La courbe représentative de  $f(x) = a^x$  avec  $a \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ 

## VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

7-2/ Exercice 2

7-3/ Exercice 3

7-4/ Exercice 4

7-5/ Exercice 5

7-6/ Exercice 6

---

# I- La fonction exponentielle népérienne $f(x) = e^x$

## 1-1/ Définition

La fonction  $f$  définie par  $\begin{cases} f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x) = \ln x \end{cases}$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  d'où  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ .

On l'appelle fonction exponentielle népérienne et on la note par  $f^{-1} = \exp$  ou  $f^{-1} = e$  avec :

$$\begin{cases} f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[ \\ x \rightarrow f^{-1}(x) = \exp(x) \end{cases}$$

## 1-2/ Conséquences

La fonction exponentielle népérienne  $f^{-1} = \exp$  ou  $f^{-1} = e$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , et la courbe de  $f$  et  $f^{-1}$  sont symétrique par rapport à la 1ère bissectrice (la droite d'équation  $y = x$ ).

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x > 0$$

La relation entre  $f(x) = \ln(x)$  et  $f^{-1} = e^x$  est  $\begin{pmatrix} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = \ln y \\ y > 0 \end{pmatrix}$ .

## 1-3/ Propriétés

$$\begin{pmatrix} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = \ln y \\ y > 0 \end{pmatrix}.$$

$$\forall x > 0 : e^{\ln x} = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a > b \Leftrightarrow e^a > e^b$$

# II- Propriétés algébriques

Soient  $a, b, x \in \mathbb{R}$  et  $r \in \mathbb{Q}$ .

On a :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$e^{-b} = \frac{1}{e^b}$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$(e^x)^r = e^{rx}$$

$$\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\sqrt[n]{e^x} = e^{\frac{1}{n}x}$$

# III- Limites

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x &= 0^- \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x &= 0 ; n \in \mathbb{N}^* \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} &= +\infty ; n \in \mathbb{N}^* \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \end{aligned}$$

## IV- Dérivée des fonctions $f(x) = e^x$ et $f(x) = e^{u(x)}$

### 4-1/ Théorème 1

La fonction  $f(x) = e^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on a :  $\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x$ .

#### Preuve

### 4-2/ Théorème 2

Si la fonction  $u(x)$  est dérivable sur un intervalle  $I$ , alors la fonction  $f(x) = e^{u(x)}$  est dérivable sur  $I$  et sa fonction dérivée est :  $f'(x) = [e^{u(x)}]' = u'(x)e^{u(x)}$ .

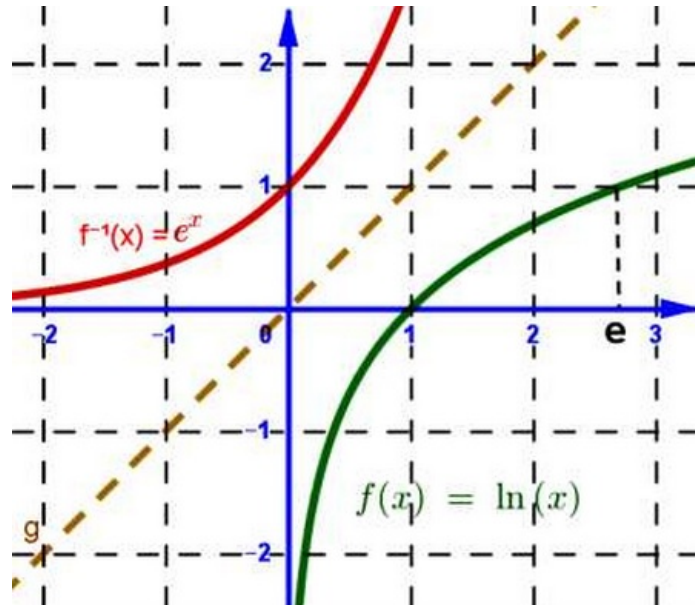
#### Exemples

## V- Étude de la fonction $f(x) = e^x$

Le tableau de variation de  $f$  :

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	+	
f	0	$+\infty$

La courbe représentative de  $f$  :



## VI- Fonction exponentielle de base $a$ avec $a \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$

### 6-1/ Définition

Soit  $a \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

La fonction définie par  $\forall x > 0 ; \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln a}$  est continue et strictement monotone sur  $]0, +\infty[$ .

Donc elle admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ , on l'appelle fonction exponentielle de base  $a$  et elle est définie par :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow ]0, +\infty[ \\ x &\rightarrow f^{-1}(x) = \exp_a(x) \end{aligned}$$

### Exemple

#### 6-2/ Remarques

$$\forall x \in \mathbb{R} ; e^{x \ln a} = a^x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \log_a(a^x) = x$$

$$\forall x > 0 ; a^{\log_a(x)} = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; 10^x = y \Leftrightarrow x = \log(y)$$

#### 6-3/ Conséquences

Soit  $a \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  et la fonction  $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$

La fonction  $f$  est continue et dérivable sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = (a^x)' = \ln a \times e^{x \ln a} = \ln a \times a^x$$

D'où le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $\ln a$ .

Si  $0 < a < 1$ , alors  $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$  est strictement croissante, d'où :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$$

Si  $a > 1$ , alors  $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$  est strictement décroissante, d'où :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$$

## 6-4/ Propriétés

Soit  $a \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  et  $r \in \mathbb{Q}$  et  $x, y \in \mathbb{R}$

On a :

$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$

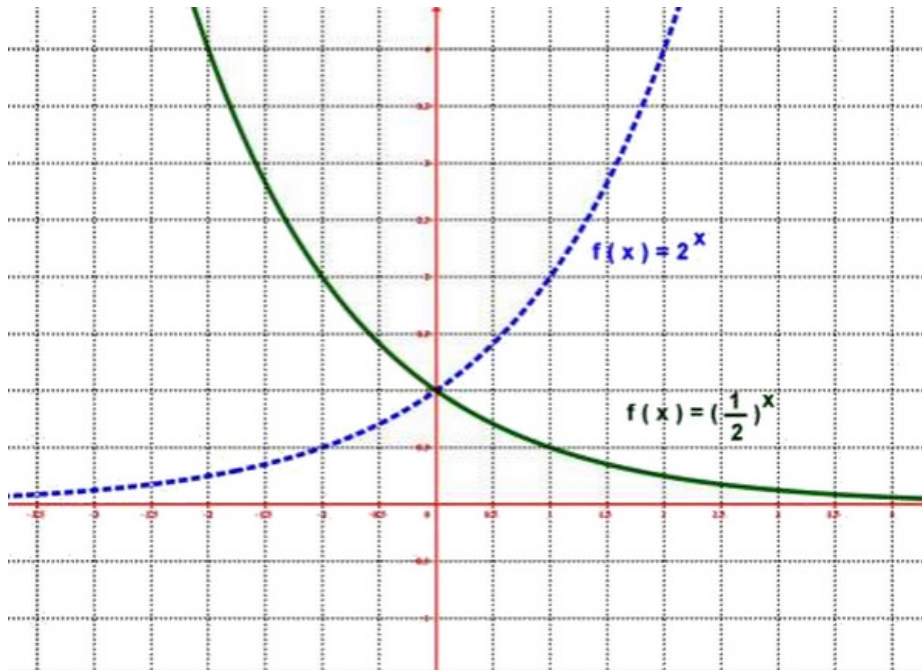
$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$\frac{1}{a^x} = a^{-x}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

## Exemples

6-5/ La courbe représentative de  $f(x) = a^x$  avec  $a \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$



## VII- Exercices

### 7-1/ Exercice 1

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$$

$$B = (e^x - 1)^2 (e^{2x} + 2e^x + 1)$$

2. Montre que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  on a :

$$\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{1-e^{-x}}{e^x+1}$$

$$\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$\textcircled{1} e^{2x} + e^x - 2 = 0$$

$$\textcircled{2} e^{2x+1} + e^{x+1} - 2e = 0$$

$$\textcircled{3} e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$$

4. Résolvez dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

- ①  $e^{2x} + e^x - 2 < 0$
- ②  $e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0$
- ③  $\frac{e^x - 1}{e^x - 2} \geq 0$

## 7-2/ Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (e^{-x} - 1)^2$

On désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité:  $2cm$ )

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que l'axe des ordonnées est une direction parabolique de  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$ .
3. Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 2e^{-x}(1 - e^{-x})$
4. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
5. Montrer que  $(C_f)$  admet un point d'inflexion .

Soit  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur  $[0, +\infty[$

6. Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.
7. Montrer que :  $(\forall x \geq 0) ; g^{-1}(x) = -\ln(1 - \sqrt{x})$
8. Tracer  $(C_f)$  et  $(C_{g^{-1}})$  dans le même repère.

## 7-3/ Exercice 3

### Partie 1

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = e^x - 2x + 2$

1. Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Étudier le signe de  $g'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et en déduire les variations de la fonction  $g$  (le calcul des limites n'est pas demandé).
3. En déduire que  $g(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

### Partie 2

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = xe^{-x} + \frac{x}{2} + 1$

4. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  et interpréter le résultat graphiquement.
5. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\frac{1}{2}x + 1)]$  et interpréter le résultat graphiquement.
6. Étudier les positions relatives de la courbe  $(C_f)$  et la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = \frac{1}{2}x + 1$ .
7. Montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{2e^x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  .
8. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
9. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $] -1; 0[$ .

10. Déterminer l'équation de la tangente ( $T$ ) à la courbe ( $C_f$ ) au point d'abscisse 0.
11. Calculer  $f''(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , puis déterminer le point d'inflexion de la courbe ( $C_f$ ).
12. Tracer ( $C_f$ ) dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (On prend  $e \approx 2,7$  et  $\frac{2}{e^2} \approx 0,27$ ).

## 7-4/ Exercice 4

### Partie 1

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = e^x - x - 1$

1. Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , puis étudier les variations de la fonction  $g$ .
2. En déduire que  $g(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ .
3. Montrer que  $(\forall x > 0) ; \frac{e^x - 1}{x} > 1$  et que  $(\forall x < 0) ; \frac{e^x - 1}{x} < 1$ .
4. Montrer que  $g(-x) = e^{-x} [1 + (x - 1)e^x]$ .
5. Déduire que  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 1 + (x - 1)e^x \geq 0$ .

### Partie 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = x - 1 - \frac{x}{e^x - x - 1}$

6. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
7. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ .
8. Calculer  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f'(x)$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$ .
9. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$  et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
10. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$  et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
11. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $] -2; -1[$  et une solution unique  $\beta$  dans l'intervalle  $]1; 2[$ .
12. Déduire que  $e^\alpha - \alpha - 1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$ .
13. Tracer ( $C_f$ ) dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (On prends  $\alpha = -1,3$  et  $\beta = 1,6$ )

### Partie 3

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$

- 14) Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$ .
- 15) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
- 16) Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

## 7-5/ Exercice 5

### Partie I

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 1 - (x + 1)e^{-x}$

1. Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) g'(x) = xe^{-x}$

- Montrer que  $g$  est croissante sur  $[0; +\infty[$  et décroissante sur  $]-\infty; 0]$ .
- Calculer  $g(0)$  et en déduire que  $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) \geq 0$ .

## Partie II

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x - 1 + (x + 2)e^{-x}$

Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 2 cm)

- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
- Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$ , et montrer que  $(C)$  est au-dessus de  $(D)$  sur  $[-2; +\infty[$  et en dessous de  $(D)$  sur  $]-\infty; -2]$ .
- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ , puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.
- Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = g(x)$
- Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ , et en admettant que  $e\sqrt{e} < 5$  montrer que  $-\frac{3}{2} < \alpha < -1$ .
- Montrer que  $I(0, 1)$  est le point d'inflexion pour la courbe  $(C)$ .
- Montrer que  $y = 1$  est l'équation de la tangente au point  $I(0, 1)$  à la courbe  $(C)$ .
- Construire dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la droite  $(D)$  et la courbe  $(C)$ .
- En utilisant une intégration par partie montrer que :  $\int_0^1 (x + 2)e^{-x} dx = 3 - \frac{4}{e}$
- Calculer, en  $cm^2$ , l'aire du domaine limité par la courbe  $(C)$  et les droites d'équations  $y = x - 1$  et  $x = 0$  et  $x = 1$ .

## 7-6/ Exercice 6

### Partie I

On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = 1 - (x + 1)e^x$

- Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- Calculer  $g(0)$ .
- En déduire le signe de  $g(x)$ .

### Partie II

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x(1 - e^x)$

On désigne par  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- Montrer que la droite  $(D) : y = x$  est une asymptote oblique à  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $-\infty$ , et préciser la position relative de  $(D)$  et  $(\mathcal{C}_f)$ .



3. Montrer que  $(\mathcal{C}_f)$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.
4. Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = g(x)$
5. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
6. Montrer que  $(\mathcal{C}_f)$  admet un point d'inflexion  $I$  dont on déterminera ses coordonnées.
7. Construire  $(D)$  et  $(\mathcal{C}_f)$ .

### Partie III

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $-1 \leq u_n \leq 0$
2. Déterminer la monotonie de la suite  $(u_n)$ , puis en déduire qu'elle est convergente.
3. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .