Mathématiques : 2 Bac SPC-SVT-STE-STM

Séance 10 (Fonctions exponentielles)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- La fonction exponentielle népérienne $f(x) = e^x$

1-1/ Définition

La fonction f définie par $\begin{cases} f :]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ \quad x \to f(x) = \ln x \end{cases}$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$ d'où f admet une fonction réciproque f^{-1}.

On l'appelle fonction exponentielle népérienne et on la note par $f^{-1} = exp$ ou $f^{-1} = e$ avec :

$$\begin{cases} f^{-1} : \mathbb{R} \to]0,+\infty[\\ \quad x \to f^{-1}(x) = exp(x) \end{cases}$$

1-2/ Conséquences

La fonction exponentielle népérienne $f^{-1} = exp$ ou $f^{-1} = e$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et la courbe de f et f^{-1} sont symétrique par rapport à la 1ère bissectrice (la droite d'équation $y = x$).

$(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ e^x > 0$

La relation entre $f(x) = \ln(x)$ et $f^{-1} = e^x$ est $\begin{pmatrix} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = \ln y \\ y > 0 \end{pmatrix}$.

1-3/ Propriétés

$\begin{pmatrix} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = \ln y \\ y > 0 \end{pmatrix}$.

$\forall x > 0 \ : \ e^{\ln x} = x$

$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \ln(e^x) = x$

$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ e^x > 0$

$\forall a, b \in \mathbb{R} \ : \ a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$

$\forall a, b \in \mathbb{R} \ : \ a > b \Leftrightarrow e^a > e^b$

II- Propriétés algébriques

Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$.

On a :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$
$$e^{-b} = \frac{1}{e^b}$$
$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$
$$(e^x)^r = e^{rx}$$
$$\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$$
$$\sqrt[n]{e^x} = e^{\frac{1}{n}x}$$

III- Limites

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$$
$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$$
$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \ ; \ n \in \mathbb{N}^*$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \ ; \ n \in \mathbb{N}^*$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

IV- Dérivée des fonctions $f(x) = e^x$ et $f(x) = e^{u(x)}$

4-1/ Théorème 1

La fonction $f(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$: $(e^x)' = e^x$.

Preuve

4-2/ Théorème 2

Si la fonction $u(x)$ est dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est : $f'(x) = \left[e^{u(x)}\right]' = u'(x)e^{u(x)}$.

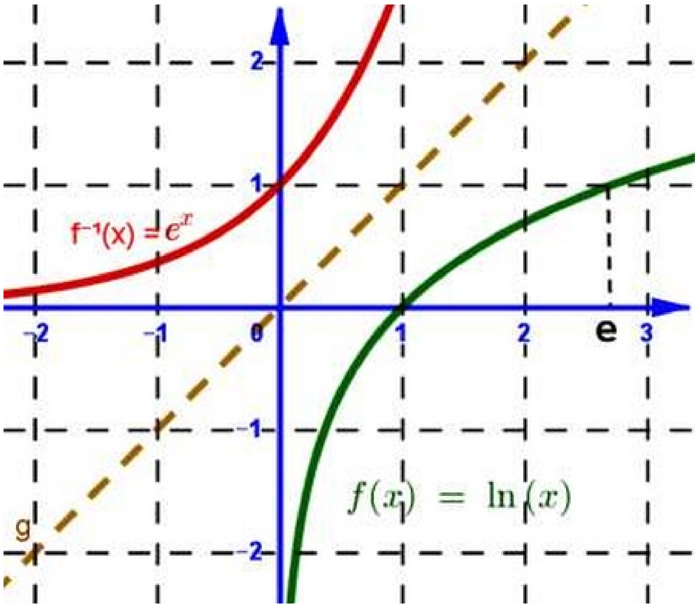
Exemples

V- Étude de la fonction $f(x) = e^x$

Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		+	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe représentative de f :



VI- Fonction exponentielle de base a avec $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$

6-1/ Définition

Soit $a \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

La fonction définie par :$\forall x > 0$; $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln a}$ est continue et strictement monotone sur $]0; +\infty[$.

Donc elle admet une fonction réciproque f^{-1}, on l'appelle fonction exponentielle de base a et elle est définie par :

$$\begin{array}{l} f^{-1} \ : \ \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[\\ x \rightarrow f^{-1}(x) = exp_a(x) \end{array}$$

Exemple

6-2/ Remarques

$\forall x \in \mathbb{R}$; $e^{x \ln a} = a^x$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $\log_a(a^x) = x$

$\forall x > 0$; $a^{\log_a(x)} = x$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $10^x = y \Leftrightarrow x = \log(y)$

6-3/ Conséquences

Soit $a \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$ et la fonction $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$

La fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

$f'(x) = (a^x)' = \ln a \times e^{x \ln a} = \ln a \times a^x$

D'où le signe de $f'(x)$ est le signe de $\ln a$.

Si $0 < a < 1$, alors $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ est strictement croissante, d'où :

$\forall x, y \in \mathbb{R} \ : \ a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$

Si $a > 1$, alors $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ est strictement décroissante, d'où :

$\forall x, y \in \mathbb{R} \ : \ a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$

6-4/ Propriétés

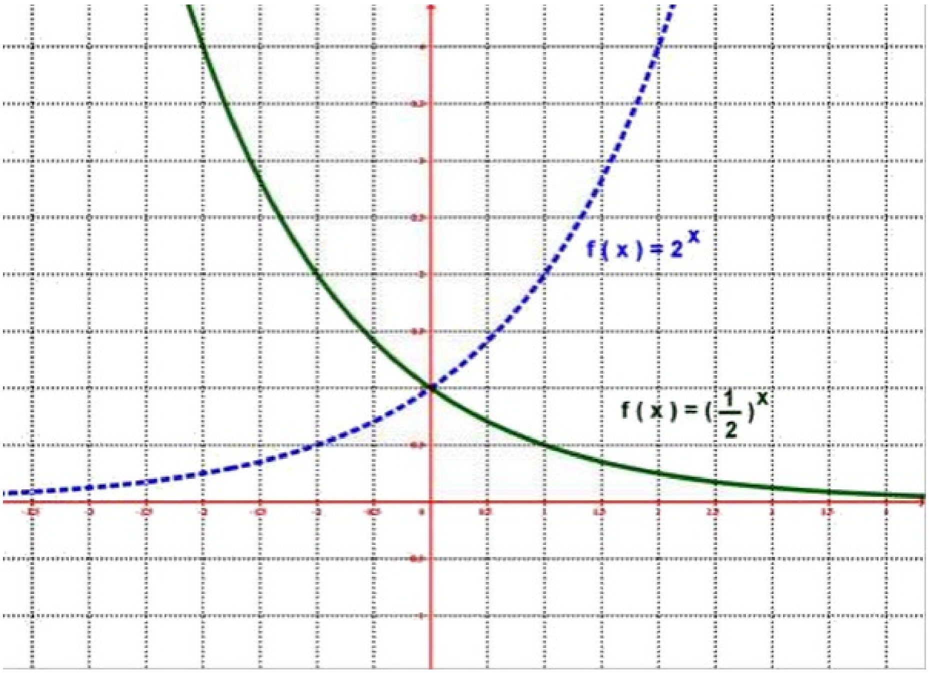
Soit $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$ et $x, y \in \mathbb{R}$

On a :

$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$
$$(a^x)^y = a^{xy}$$
$$\frac{1}{a^x} = a^{-x}$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

Exemples

6-5/ La courbe représentative de $f(x) = a^x$ avec $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$



VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$$
$$B = (e^x - 1)^2 \left(e^{2x} + 2e^x + 1\right)$$

2. Montre que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

$$\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{1-e^{-x}}{e^x+1}$$
$$\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$① \; e^{2x} + e^x - 2 = 0$$
$$② \; e^{2x+1} + e^{x+1} - 2e = 0$$
$$③ \; e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$$

4. Résolvez dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$① \; e^{2x} + e^{x} - 2 < 0$$
$$② \; e^{2x} + 2e^{x} - 3 \geq 0$$
$$③ \; \frac{e^{x}-1}{e^{x}-2} \geq 0$$

7-2/ Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(e^{-x} - 1\right)^2$

On désigne par $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité: $2cm$)

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que l'axe des ordonnées est une direction parabolique de $\left(C_f\right)$ au voisinage de $-\infty$.
3. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = 2e^{-x}\left(1 - e^{-x}\right)$
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Montrer que $\left(C_f\right)$ admet un point d'inflexion .

Soit g la restriction de la fonction f sur $[0, +\infty[$

6. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
7. Montrer que : $(\forall x \geq 0)$; $g^{-1}(x) = -\ln\left(1 - \sqrt{x}\right)$
8. Tracer $\left(C_f\right)$ et $\left(C_{g^{-1}}\right)$ dans le même repère.

7-3/ Exercice 3

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{x} - 2x + 2$

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire les variations de la fonction g (le calcul des limites n'est pas demandé).
3. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = xe^{-x} + \frac{x}{2} + 1$

4. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement.
5. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\right]$ et interpréter le résultat graphiquement.
6. Étudier les positions relatives de la courbe $\left(C_f\right)$ et la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.
7. Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{2e^{x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
8. Dresser le tableau de variations de f.
9. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-1; 0[$.

10. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse 0.

11. Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis déterminer le point d'inflexion de la courbe $\left(C_f\right)$.

12. Tracer $\left(C_f\right)$ dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (On prend $e \approx 2,7$ et $\frac{2}{e^2} \approx 0,27$).

7-4/ Exercice 4

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x - 1$

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis étudier les variations de la fonction g.
2. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
3. Montrer que $(\forall x > 0)$; $\frac{e^x-1}{x} > 1$ et que $(\forall x < 0)$; $\frac{e^x-1}{x} < 1$.
4. Montrer que $g(-x) = e^{-x}\left[1 + (x-1)e^x\right]$.
5. Déduire que $(\forall x \in \mathbb{R})$; $1 + (x-1)e^x \geq 0$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x - 1 - \frac{x}{e^x - x - 1}$

6. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
7. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.
8. Calculer $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$: $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.
9. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x-1)\right]$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
10. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - x\right]$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
11. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-2;-1[$ et une solution unique β dans l'intervalle $]1;2[$.
12. Déduire que $e^\alpha - \alpha - 1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$.
13. Tracer $\left(C_f\right)$ dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (On prends $\alpha = -1,3$ et $\beta = 1,6$)

Partie 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

14)Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $0 \leq u_n \leq 1$.

15)Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

16)Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

7-5/ Exercice 5

Partie I

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $g'(x) = xe^{-x}$

2. Montrer que g est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$.
3. Calculer $g(0)$ et en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R})\ g(x) \geq 0$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + (x+2)e^{-x}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : 2 cm)

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
2. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$, et montrer que (C) est au-dessus de (D) sur $[-2;+\infty[$ et en dessous de (D) sur $]-\infty;-2]$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.
4. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = g(x)$
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$, et en admettant que $e\sqrt{e} < 5$ montrer que $-\frac{3}{2} < \alpha < -1$.
7. Montrer que $I(0,1)$ est le point d'inflexion pour la courbe (C).
8. Montrer que $y = 1$ est l'équation de la tangente au point $I(0,1)$ à la courbe (C).
9. Construire dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ la droite (D) et la courbe (C).
10. En utilisant une intégration par partie montrer que : $\int_0^1 (x+2)e^{-x}\,\mathrm{d}x = 3 - \frac{4}{e}$
11. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C) et les droites d'équations $y = x - 1$ et $x = 0$ et $x = 1$.

7-6/ Exercice 6

Partie I

On considère la fonction g définie par : $g(x) = 1 - (x+1)e^x$

1. Dresser le tableau de variation de g.
2. Calculer $g(0)$.
3. En déduire le signe de $g(x)$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\left(1 - e^x\right)$

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
2. Montrer que la droite $(D) :\ y = x$ est une asymptote oblique à $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au voisinage de $-\infty$, et préciser la position relative de (D) et $\left(\mathscr{C}_f\right)$.

3. Montrer que $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.
4. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = g(x)$
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Montrer que $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet un point d'inflexion I dont on déterminera ses coordonnées.
7. Construire (D) et $\left(\mathscr{C}_f\right)$.

Partie III

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $-1 \leq u_n \leq 0$
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n), puis en déduire qu'elle est convergente.
3. Calculer la limite de la suite (u_n).