Mathématiques : 2ème Année Collège

Séance 9 (Droites remarquables dans un triangle)

Professeur : Mr BENGHANI Youssef

Sommaire

6-5/ Exercice 5

6-6/ Exercice 6

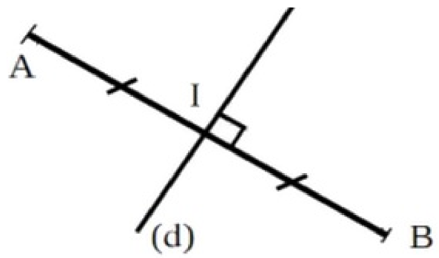
I- Médiatrices d'un triangle

1-1/ La médiatrice des côtés (Rappel)

Définition

la médiatrice d'un segment $[AB]$ est la droite qui est perpendiculaire à la droite (AB) et qui passe par le milieu du segment $[AB]$

Exemple



Si (d) est médiatrice de $[AB]$, alors : $\begin{cases} (d) \perp (AB) \\ I\ milieu\ de\ \ [AB] \end{cases}$

Remarques

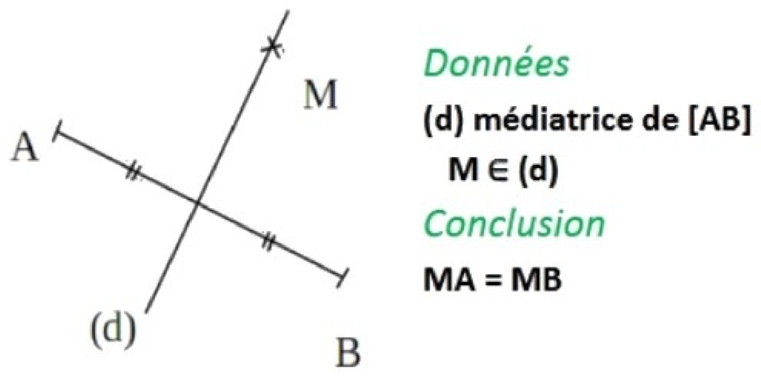
La médiatrice d'un segment $[AB]$ est l'axe de symétrie du segment $[AB]$.

Si (d) médiatrice de $[AB]$, alors A et B sont symétriques par rapport à (d).

1-2/ Propriétés

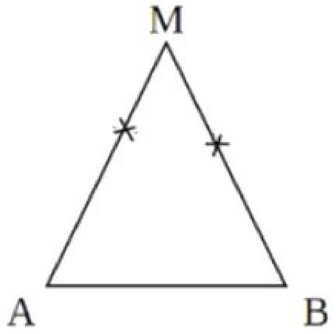
Propriété directe

Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités du segment :



Propriété réciproque

Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment :



Données

MA = MB

Conclusion

M appartient à la Médiatrice de [AB].

1-3/ Médiatrices d'un triangle

Définition

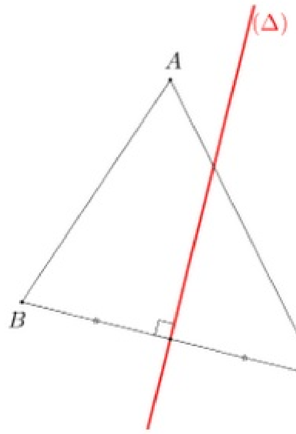
La médiatrice d'un triangle c'est la médiatrice de l'un de ses côtés.

Chaque triangle a trois médiatrices.

Exemple

Soit ABC un triangle.

(Δ) est la médiatrice du côté $[BC]$



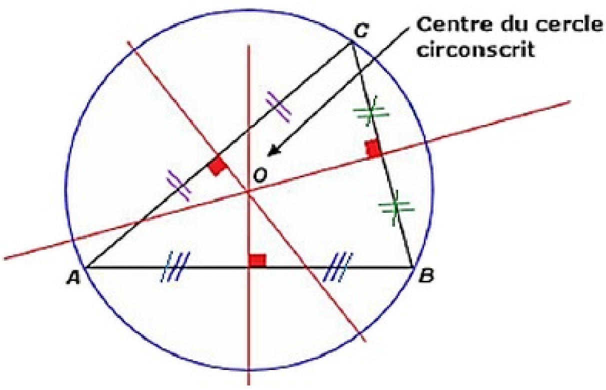
On appelle (Δ) aussi La médiatrice du triangle ABC.

1-4/ Propriétés

Les médiatrices des trois côtés d'un triangle se coupent en un même point : On dit qu'elles sont concourantes.

Ce point commun est le centre d'un cercle passant par les trois sommets du triangle.

On dit que ce cercle est le cercle circonscrit au triangle.



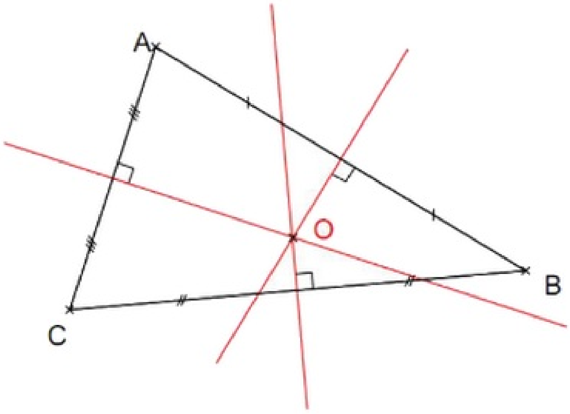
Le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

1-5/ Remarques importantes

Pour déterminer le centre du cercle circonscrit à un triangle, il suffit de tracer deux de ses médiatrices.

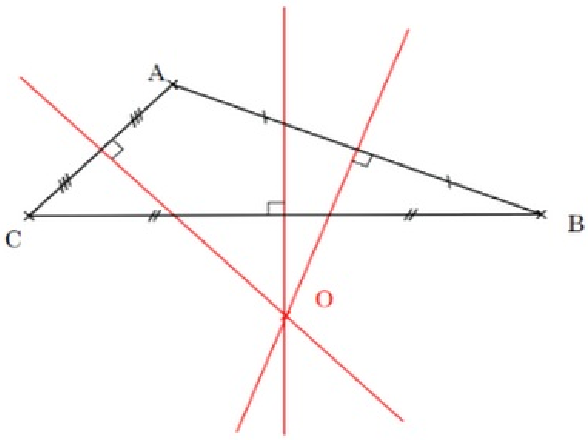
1er cas

Si les 3 angles du triangle sont aigus, alors le centre du cercle circonscrit au triangle est à l'intérieur du triangle :



2nd cas

Si l'un des angles est obtus, alors le centre du cercle circonscrit au triangle est à l'extérieur du triangle :



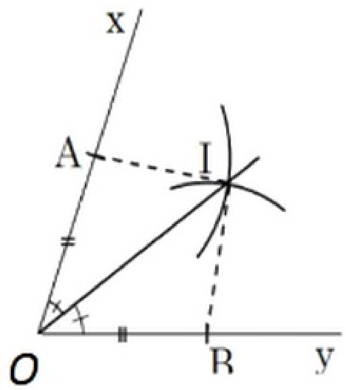
II- Bissectrices d'un triangle

2-1/ Bissectrices d'un angle (Rappel)

Définition

La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage l'angle en deux angles adjacents de même mesure.

Exemple



$[OI)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

2-2/ Bissectrices d'un triangle

Définition

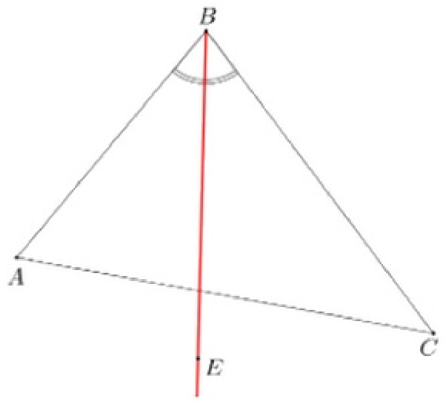
La bissectrice d'un triangle est la bissectrice de l'un de ses angles.

Chaque triangle a trois bissectrices.

Exemple

Soit ABC un triangle.

$[BE)$ la bissectrice de l'angle ABC.

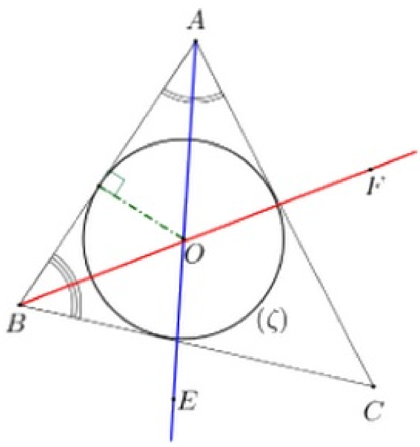


On appelle aussi $[BE)$: La bissectrice du triangle ABC.

Propriété

Dans un triangle, les trois bissectrices sont concourantes (elles passent par un même point)

Le point de concours I est le centre du cercle inscrit du triangle.



Le point O est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

Remarque

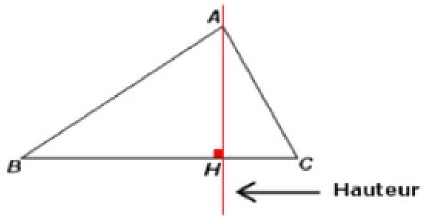
Pour construire le centre du cercle inscrit, il suffit de tracer deux bissectrices de ce triangle.

III- Hauteurs d’un triangle

3-1/ Définition

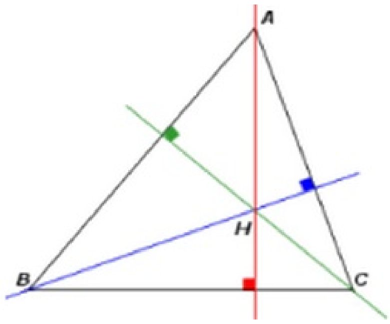
La hauteur d’un triangle est la droite qui passe par l’un des sommets de ce triangle et perpendiculaire au support de côté opposé à ce sommet.

Exemple



3-2/ Propriété

Les hauteurs d’un triangle sont concourantes, Leur point de concours s’appelle l’orthocentre du triangle.



H est l'orthocentre Du triangle ABC.

Remarque

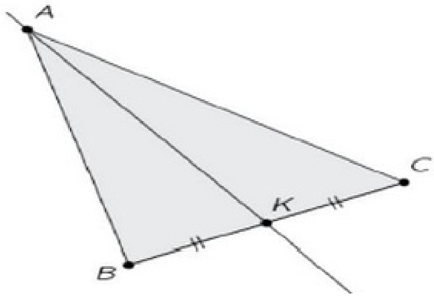
Pour construire l’orthocentre d’un triangle, il suffit de tracer deux hauteurs de ce triangle.

IV- Médiane d'un triangle

4-1/ Définition

La médiane d’un triangle c’est la droite passant par un sommet de se triangle et le milieu du côté opposé à ce sommet.

Exemple

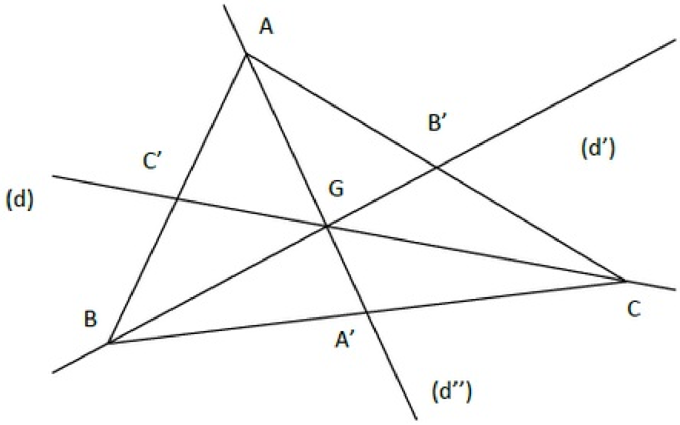


(d) est la médiane relative au coté $[BC]$ ou la médiane issue du sommet A.

4-2/ Propriété

Les trois médianes d’un triangle sont concourantes en un point G.

On dit que ce point commun G est le centre de gravité du triangle.



Le point G est le centre de gravité du triangle ABC.

Remarque

Si dans un triangle, un point est l’intersection de deux médianes, alors il est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir des sommets.

C'est à dire :

$$AG = \frac{2}{3}AA' \quad ; \quad BG = \frac{2}{3}BB' \quad ; \quad CG = \frac{2}{3}CC'$$

V- Triangles particuliers

5-1/ Triangle rectangle

Dans un triangle rectangle :

- les hauteurs issues des « sommets des angles aigus » sont confondues avec les côtés de l’angle droit.
- Les 3 médiatrices sont concourantes en un point qui est le milieu de l’hypoténuse.

5-2/ Triangle isocèle

Dans un triangle isocèle :

- Les 4 droites remarquables issues du sommet principal sont confondues (C’est l’axe de symétrie du triangle isocèle).

5-3/ Triangle équilatéral

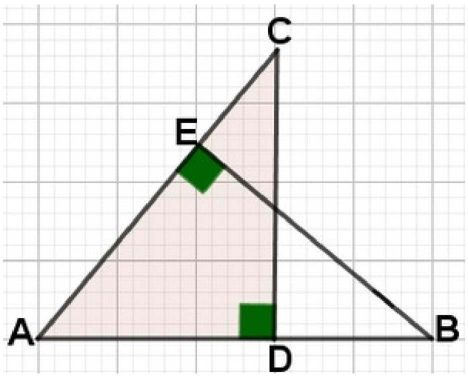
Dans un triangle équilatéral :

- Les 4 droites remarquables issues de chaque sommet sont confondues (Ce sont les 3 axes de symétrie du triangle équilatéral).

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

Soit figure suivante :



F le point d'intersection des deux droites (CD) et (BE)

1. Montrer que $(AF) \perp (BC)$

6-2/ Exercice 2

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

Soient I est le milieu de $[AD]$ et J celui de $[AB]$.

Soit (D_1) la droite passant par I et perpendiculaire à $[AD]$.

Soit (D_2) la droite passant par J et perpendiculaire à $[AB]$.

Les deux droites (D_1) et (D_2) se coupent en K.

1. Dessiner la figure.
2. Que peut-on dire des droites (OK) et (BD) ?

(Aide : Utiliser le triangle ABD)

6-3/ Exercice 3

$EFGH$ est un carré de centre I et O le milieu de $[HG]$.

La droite (FO) coupe la droite (EG) en point K.

1. Dessiner la figure
2. Que représente le point K pour le triangle FGH ?
3. Calculer GK sachant que $GI = 6$
4. Démontrer que la droite (OI) est la médiatrice du segment $[HG]$.
5. Que représente le point I pour le triangle FGH ?

6-4/ Exercice 4

ABC est un triangle tel que $BC = 5cm$ et $\widehat{ABC} = 45^\circ$ et $AB = 7cm$.

La droite qui passe par le point B et perpendiculaire à la droite (AB), coupe la droite (AC) en E.

1. Dessiner la figure.

La bissectrice de l'angle EAB coupe le segment $[BC]$ en un point O.

2. Prouver que le point O est le centre du cercle inscrit au triangle AEB.

6-5/ Exercice 5

ABC est un triangle équilatéral.

1. Trouver la relation entre R_1 rayon du cercle inscrit et R_2 rayon du cercle circonscrit.

6-6/ Exercice 6

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

G est le centre du gravité du triangle ABD et G' le centre du gravité du triangle BCD.

1. Dessiner la figure.
2. Montrer que $AG = \frac{1}{3}AC$
3. Démontrer que O est le milieu du segment $[GG']$.