Mathématiques : 3ème Année Collège

Séance 9 (Triangles isométriques et triangles semblables)

Professeur : Mr BENGHANI Youssef

Sommaire

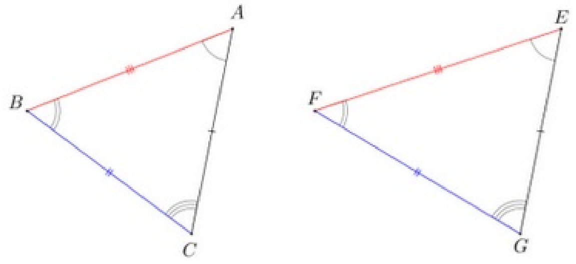
I- Triangles isométriques

1-1/ Définition

Deux triangles isométriques sont des triangles superposables.

Exemple

Soient ABC et EFG deux triangles isométriques.



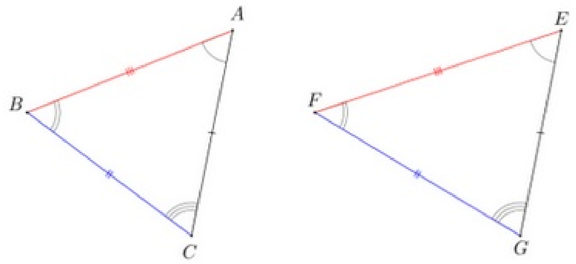
1-2/ Remarques

Les côtés $[AB]$ et $[EF]$ sont appelés côtés correspondants.

De même: $[AC]$ et $[EG]$; $[BC]$ et $[FG]$.

Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EFG}$ sont appelés angles correspondants.

De même: $\widehat{ACB}$ et $\widehat{EGF}$; $\widehat{BAC}$ et $\widehat{FEG}$.



1-3/ Propriété

Si deux triangles sont isométriques, alors :

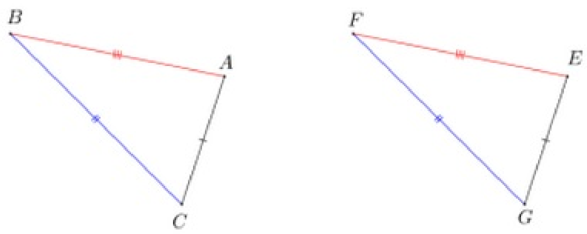
- Leurs côtés correspondants sont de même longueur.
- Leurs angles correspondants sont de même mesure.

1-4/ Cas d'isométrie

Premier cas

Si deux triangles ont leurs côtés respectivement de même longueur, alors les deux triangles sont isométriques.

Exemple



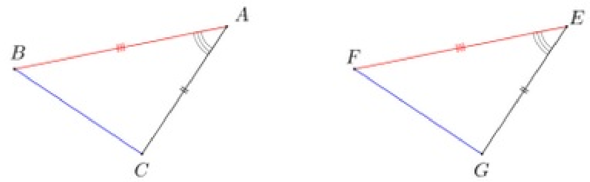
ABC et EFG sont deux triangles isométriques car :

$$AB = EF$$
$$AC = EG$$
$$BC = FG$$

Second cas

Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés respectivement de même longueur, alors les deux triangles sont isométriques.

Exemple



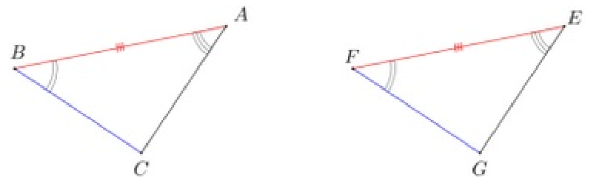
ABC et EFG sont deux triangles isométriques car :

$$AB = EF$$
$$AC = EG$$
$$\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$$

Troisième cas

Si deux triangles ont un côté de même longueur adjacent à deux angles de même mesure, alors les deux triangles sont isométriques.

Exemple



ABC et EFG sont deux triangles isométriques car :

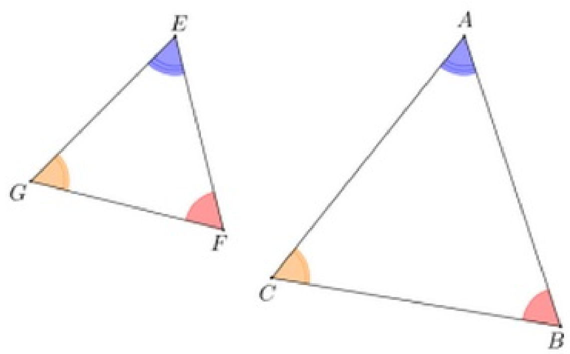
$$AB = EF$$
$$\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$$
$$\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$$

II- Triangles semblables

2-1/ Définition

Deux triangles semblables sont des triangles qui ont leurs angles deux à deux de même mesures.

On considère les triangles ABC et EFG tels que $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{EGF}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$:



On dit que les triangles ABC et EFG sont semblables.

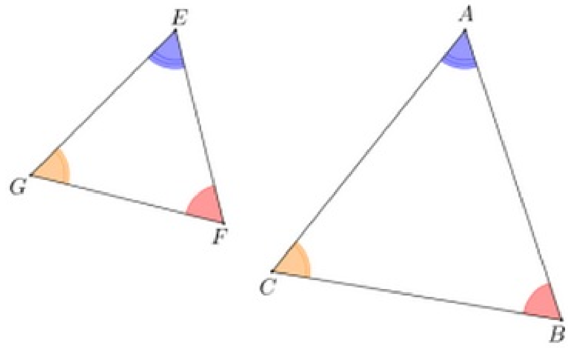
2-2/ Remarques

Les côtés $[AB]$ et $[EF]$ sont appelés côtés correspondants.

De même: $[AC]$ et $[EG]$; $[BC]$ et $[FG]$.

Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EFG}$ sont appelés angles correspondants.

De même: $\widehat{ACB}$ et $\widehat{EGF}$; $\widehat{BAC}$ et $\widehat{FEG}$.



2-3/ Propriété

Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés correspondants sont proportionnelles.

Autrement dit

Si ABC et EFG sont deux triangles semblables (dans cet ordre), alors :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG} = k$$

k est appelé rapport de similitude.

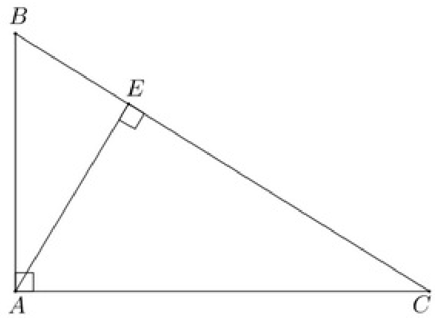
Exemple

2-4/ Cas de similitude

Premier cas

Si deux triangles ont deux angles qui ont même mesure, alors les triangles sont semblables.

Exemple



Second cas

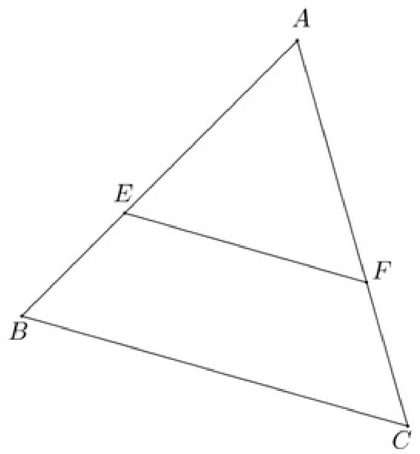
Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés dont les longueurs sont respectivement proportionnelles, alors les triangles sont semblables.

Autrement dit

Soient ABC et EFG deux triangles.

Si $\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{FEG} \\ \frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} \end{cases}$, alors les triangles ABC et EFG sont semblables.

Exemple



Troisième cas

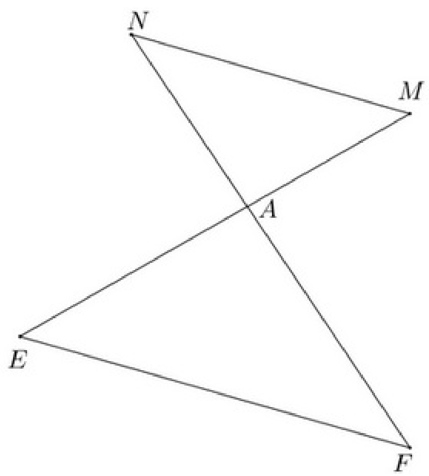
Si deux triangles ont les longueurs de leur côtés respectivement proportionnelles, alors les triangles sont semblables.

Autrement dit

Soient ABC et EFG deux triangles.

Si $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG}$, alors les triangles ABC et EFG sont semblables.

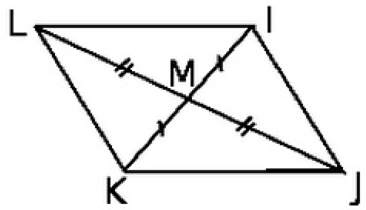
Exemple



III- Exercices

3-1/ Exercice 1

On considère la figure suivante :

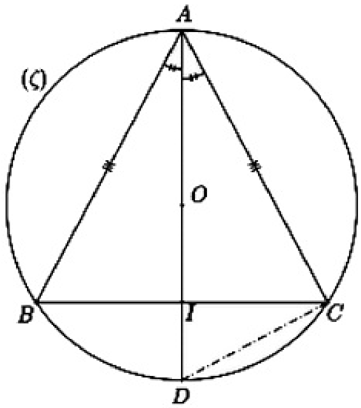


$ILJK$ est un parallélogramme de centre M.

1. Montrer que les deux triangles LKJ et IJL sont isométriques.
2. Montrer que les deux triangles LMK et IJM sont isométriques.

3-2/ Exercice 2

On considère la figure suivante :

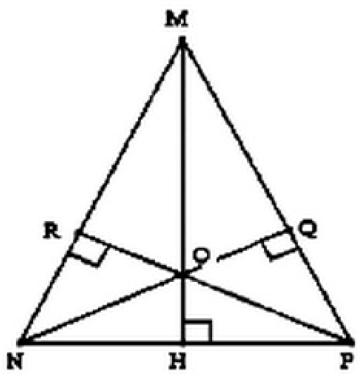


ABC est un triangle isocèle en A et $[AD)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

1. Prouver que les triangles ABI et ACI sont isométriques.
2. Prouver que $\widehat{DAC}$ et $\widehat{ICD}$.
3. Montrer que les triangles ADC et ICD sont semblables.
4. Montrer que : $AD\, x\, CI \;=\; AC\, x\, CD$.

3-3/ Exercice 3

On considère la figure suivante :



MNP est un triangle isocèle de sommet M.

1. Prouver que les deux triangles OMN et OMP sont isométriques.
2. Montrer que les deux triangles MOQ et MNH sont semblables.
3. En déduire que : $MO \times MH = MN \times MQ$.

3-4/ Exercice 4

$ABCD$ est un parallélogramme, N un point du segment $[DC]$ distinct de D et C.

La droite (AN) coupe (BC) en M.

1. Démontrer que les triangles ADN et ABM sont des triangles semblables.
2. En déduire que $DN \times BM = AB \times AD$.

3-5/ Exercice 5

$ABCD$ est un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle tel que $[AC]$ est un diamètre.

Soit H le projeté orthogonal du point A sur la droite (DB).

1. Comparer les deux triangles AHB et ADC.
2. Montrer que : $AD \times AB = AC \times AH$

3-6/ Exercice 6

(C) est un cercle et A un point extérieur à (C).

Du point A, on construit deux droites (Δ) et (Δ') tels que la droite (Δ) coupe (C) en E et F , et la droite (Δ') coupe (C) en B et C.

1. Comparer les triangles ABF et AEC.
2. Démontrer que $\widehat{AEC} = \widehat{FBA}$.
3. Démontrer que $AE \times AF = AB \times AC$.