

Sommaire

I- Critères de convergence

1-1/ Critère 1 (Théorème des gendarmes)

1-2/ Critère 2 (Théorème des gendarmes)

1-3/ Théorème

1-4/ Critère 3

II- Limite d'une suite de type  $U_{n+1} = f(U_n)$

III- Limite d'une suite de type  $V_n = f(U_n)$

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

4-2/ Exercice 2

4-3/ Exercice 3

4-4/ Exercice 4

---

I- Critères de convergence

1-1/ Critère 1 (Théorème des gendarmes)

Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites numériques.

Si, on a  $v_n \leq u_n \leq w_n$  pour tout  $n$  de  $I$  et  $\lim v_n = \lim w_n = l$ , alors  $(u_n)$  est convergente et  $\lim u_n = l$ .

**Exemple**

1-2/ Critère 2 (Théorème des gendarmes)

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites numériques et  $l$  un réel.

Si, on a  $|u_n - l| \leq v_n$  pour tout  $n$  de  $I$  et  $\lim v_n = 0$ , alors  $(u_n)$  est convergente et  $\lim u_n = l$ .

1-3/ Théorème

Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.

Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

### 1-4/ Critère 3

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites numériques.

Si on a  $u_n \geq v_n$  pour tout  $n$  de  $I$ , et  $\lim v_n = +\infty$ , alors  $\lim u_n = +\infty$ .

Si on a  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n$  de  $I$  et  $\lim v_n = -\infty$ , alors  $\lim u_n = -\infty$ .

#### Exemple

### II- Limite d'une suite de type $U_{n+1} = f(U_n)$

#### Propriété

$(U_n)_{n \in I}$  est la suite numérique définie par la relation récurrente du type  $U_{n+1} = f(U_n)$ , et de premier terme  $U_0$ , avec  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$  telle que  $f(I) \subset I$ .

Si  $U_0 \in I$  et  $(U_n)_{n \in I}$  est une suite convergente alors sa limite  $l$  est une solution de l'équation  $f(x) = x$ .

#### Exemple

### III- Limite d'une suite de type $V_n = f(U_n)$

#### Propriété

si  $(U_n)_{n \in I}$  est la suite numérique convergente, et sa limite vaut  $L$ , et  $f$  est une fonction continue en  $L$ ,

Alors la suite  $(V_n)_{n \in I}$  définie par  $V_n = f(U_n)$  est une suite convergente et sa limite est  $f(L)$ .

#### Exemple

### IV- Exercices

#### 4-1/ Exercice 1

On considère la fonction  $h$  définie sur  $[1, +\infty[$  par  $h(x) = \sqrt{x}$

1. Étudier la monotonie de  $h$  sur  $[1, +\infty[$ .
2. Montrer que  $h([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$ .
3. Étudier le signe de  $h(x) - x$  sur  $[1, +\infty[$ .
4. Résoudre dans  $[1, +\infty[$  l'équation  $h(x) = x$ .

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  : 
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

5. Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq 1$ .
6. Montrer que  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante.
7. En déduire qu'elle est convergente.
8. Calculer la limite de  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

#### 4-2/ Exercice 2

Soit  $(u_n)$  une suite numérique définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 2 \leq u_n \leq 4$ .
2. Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
3. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$ .
4. En déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .
5. Calculer la limite de  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

#### 4-3/ Exercice 3

Soit  $(u_n)$  une suite numérique définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2 + 1} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$ .
2. Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ . et en déduire qu'elle est convergente
3. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$ .
4. En déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ .
5. Calculer limite de  $(u_n)$ .

#### 4-4/ Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x}\right)$

1. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{3}{2}$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Calculer  $u_1$  et  $u_2$  (donner les résultats sous forme de fractions irréductibles, puis sous forme décimales arrondies à  $10^{-2}$  près).
3. Démontrer, par récurrence, que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$
4. Démontrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{2})$ .
5. En déduire, par récurrence, que pour tout entier  $n$ , on a : 
$$(\forall n \in \mathbb{N}) 0 < u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{2})$$
6. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .