AlloSchool

Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Séance 6 (Suites numériques – Partie 1)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Suites numérique (Rappels)

1-1/ définition

Toute fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ ou d'une partie I de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ est dite suite numérique.

Notation et vocabulaire.

- L'image de n par la suite u est notée u_n.
- La suite est notée $(u_n)_{n\in I}$ (ou plus simplement (u_n) si $n \in \mathbb{N}$).
- u_n est un « terme » de la suite, et on l'appelle terme général de la suite.
- u_p est un « terme » de la suite, et on l'appelle le premier terme de la suite.
- On peut définir une suite par une formule explicite, c'est-à-dire par une relation du type : $u_n = f(n)$

- On peut définir une suite par récurrence, c'est-à-dire par la donnée d'un (premier) terme et par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ ou par d'autres types.

1-2/ Rappel 1 : Suites arithmétiques et suites géométrique

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - u_n = r$	$(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = qu_n\ ou\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$
Le terme général	$u_n = u_p + r(n-p)$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
La somme des termes d'une suite	$S = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$ $S = (n-p+1)\left(\frac{u_p+u_n}{2}\right)$	$S = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$ $S = u_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$

Exemple

1-3/ Rappel 2 : Suite majorée – Suite minorée – Suite bornée

Une suite majorée :

$$(\forall n \in I)\ (\exists M \in \mathbb{R})\ u_n \leq M$$

Une suite minorée :

$$(\forall n \in I)\ (\exists m \in \mathbb{R})\ u_n \geq m$$

Une suite bornée :

$$(\forall n \in I)\ (\exists m, M \in \mathbb{R})\ m \leq u_n \leq M$$

1-4/ Rappel 3 : Monotonie d'une suite numérique

Suite croissante :

$$(\forall n \in I)\ u_{n+1} \geq u_n$$

Suite décroissante :

$$(\forall n \in I)\ u_{n+1} \leq u_n$$

II- Limite d'une suite numérique

2-1/ Limite de suites de référence

Propriété 1

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \ ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \ ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \ ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \ ; \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \ ; \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \ ; \quad \lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty$$

Exemple

Propriété 2

(u_n) est une suite numérique et l un réel :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - l = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Propriété 3

Si la suite (u_n) admet une limite l alors cette limite est unique.

2-2/ Limite de la suite géométrique q^n avec $q \in \mathbb{R}^*$

Propriété

Soit q un nombre réel non nul :

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	pas de limite	0	1	$+\infty$

Exemple

III- Convergence d'une suite

Définition

(u_n) est une suite convergente si elle admet une limite finie.

(u_n) est une suite divergente si elle n'est pas convergente.

Exemple

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

(u_n) est la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 5 \ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2
2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ u_n < 15$
3. Montrer que (u_n) est croissante et qu'elle est convergente

On pose $(\forall n \in \mathbb{N})$ $v_n = u_n - 15$

4. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
5. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n.
6. Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n$ en fonction de n.
7. Calculler limite de (u_n)

VI- Exercices

4-2/ Exercice 2

(u_n) est la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 9}{u_n - 2} \ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n > 3$

On pose $(\forall n \in \mathbb{N})$ $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

2. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
3. En déduire v_n et u_n en fonction de n.
4. Calculer la limite de (u_n)
5. Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n$ en fonction de n.

IV- Exercices

4-3/ Exercice 3

(u_n) est la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2
2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ u_n > 1$
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-1)^2}{u_n}$
4. En déduire que (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente

On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) \ v_n = \frac{u_n-2}{u_n-1}$

.

5. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
6. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n.
7. Calculler limite de (u_n)

4-4/ Exercice 4

Considérons la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n > \frac{1}{2}$.
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{5}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$.
4. Déduire la monotonie de (u_n), puis montrer qu'elle est convergente.
5. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n \leq 1$, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \frac{1}{2} < u_n \leq 1$.

Posons $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Calculer v_0, et montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.
7. Calculer v_n en fonction de n, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n = \frac{1}{2}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1\right)$.
8. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Posons $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$.

9. Montrer que $S_n = \frac{55}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + \frac{n}{2}$.