

Sommaire**I- Dérivabilité d'une fonction en un point**

1-1/ Nombre dérivé en un point

1-2/ Interprétation géométrique du nombre dérivé

II- Dérivabilité à droite – dérivabilité à gauche

2-1/ Définition et propriété

2-2/ Interprétation géométrique

III- Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

3-1/ Définition

3-2/ Propriété

3-3/ Tableau des dérivées usuelles

3-4/ Opérations sur les fonctions dérivées

IV- Applications de la dérivation

4-1/ Variations d'une fonction

4-2/ Valeur minimale et maximale

4-3/ Étude de la concavité d'une courbe

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

5-2/ Exercice 2

5-3/ Exercice 3

5-4/ Exercice 4

5-5/ Exercice 5

5-6/ Exercice 6

I- Dérivabilité d'une fonction en un point

1-1/ Nombre dérivé en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , et soit $a \in I$

On dit que f est dérivable en a , s'il existe un réel l tel que : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

Le nombre l est appelé le nombre dérivé de la fonction f en a , noté $f'(a)$, et on écrit :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

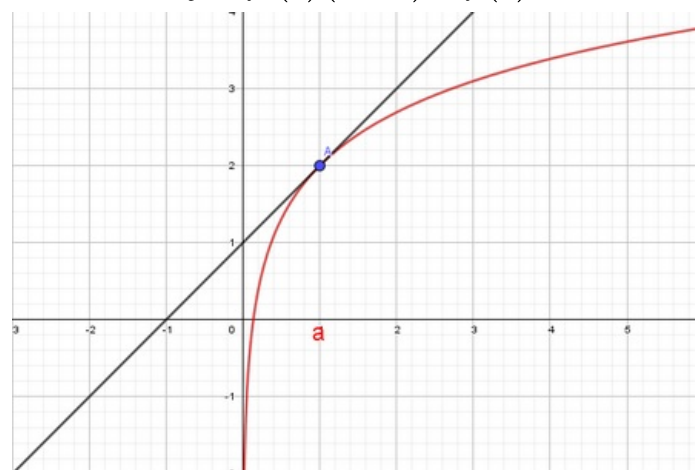
Exemple

1-2/ Interprétation géométrique du nombre dérivé

Propriété

Si f est une fonction dérivable en a , alors l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a est donnée par :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



Exemple

II- Dérivabilité à droite – dérivabilité à gauche

2-1/ Définition et propriété

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a, a + r[$ où $r > 0$

On dit que f est dérivable à droite de a , s'il existe un réel l tel que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

Le nombre l est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en a , noté $f'_d(a)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a - r, a]$ où $r > 0$

On dit que f est dérivable à gauche de a , s'il existe un réel l tel que $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

Le nombre l est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en a , noté $f'_g(a)$

Exemple

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , et soit $a \in I$

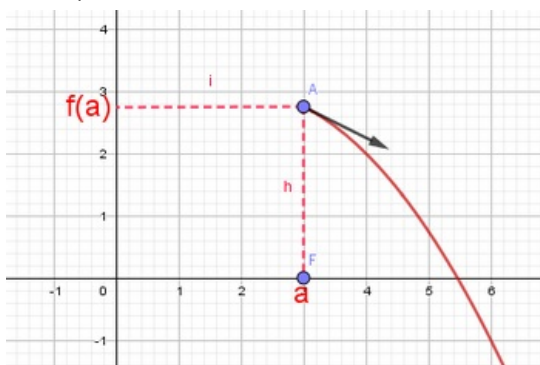
f est dérivable en $a \Leftrightarrow f$ est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

Exemple

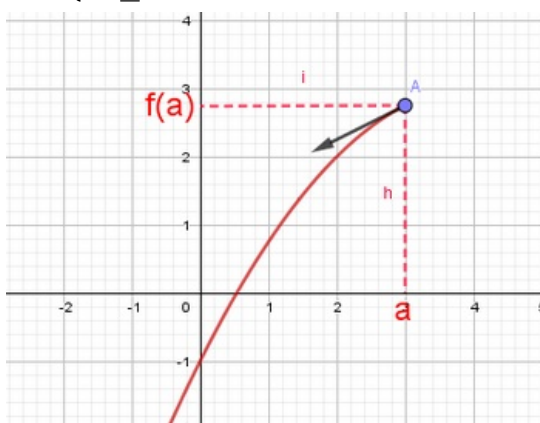
2-2/ Interprétation géométrique

Propriété

Si f est dérivable à droite en a , alors la courbe (\mathcal{C}_f) admet une demi-tangente à droite du point d'abscisse a , d'équation :
$$\begin{cases} y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$



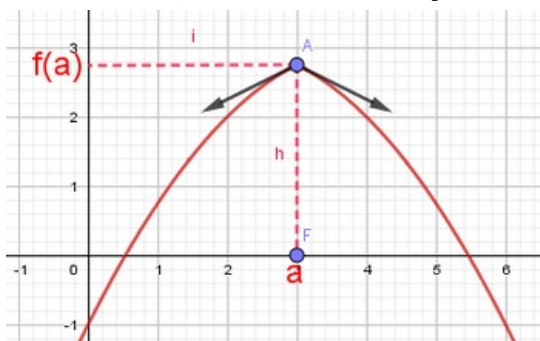
Si f est dérivable à gauche en a , alors la courbe (\mathcal{C}_f) admet une demi-tangente à gauche du point d'abscisse a , d'équation :
$$\begin{cases} y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$



Exemple

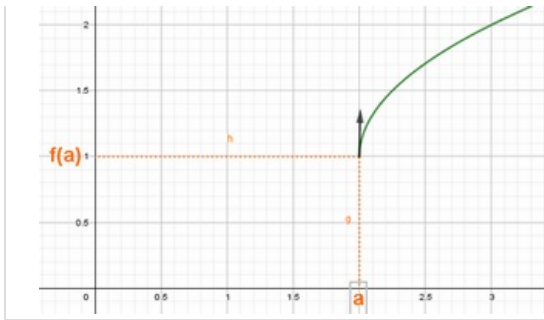
Remarques

A- Si f dérivable à droite et à gauche en a , et $f'_d(a) \neq f'_g(a)$

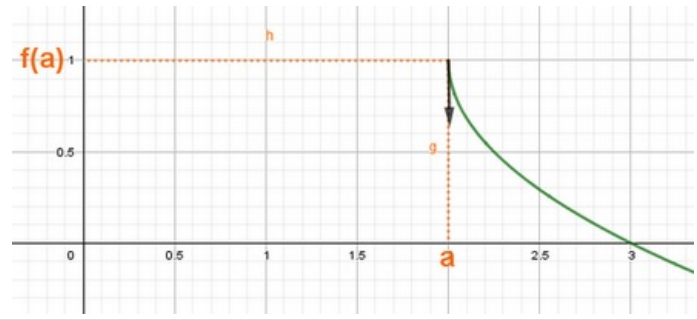


B- Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$, alors (\mathcal{C}_f) admet une demi-tangente verticale à droite du point d'abscisse a .

--	--

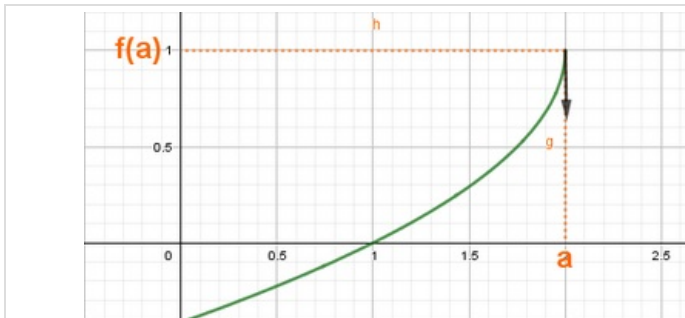


$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$$

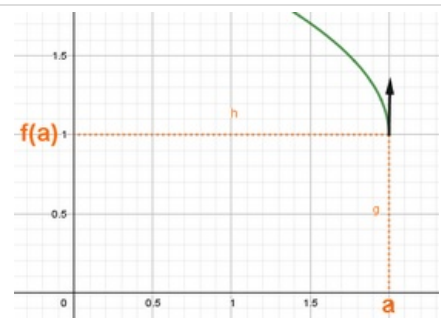


$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$$

C- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$, alors (\mathcal{C}_f) admet une demi-tangente verticale à gauche du point d'abscisse a .



$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$$

III- Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

3-1/ Définition

On dit que f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ si f est dérivable en tout point de l'intervalle $]a, b[$.

On dit que f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a, b]$ si f est dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, et dérivable à droite en a et à gauche en b .

3-2/ Propriété

Toute fonction polynomiale est dérivable sur \mathbb{R} .

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition.

La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exemple

3-3/ Tableau des dérivées usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	\mathbb{R}
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	\mathbb{R}
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}'
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}'

3-4/ Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 1

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Les fonctions $f + g$ et $f \times g$ sont dérivables sur I , et on a :

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f'$$

$$(f \times g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Si g ne s'annule pas sur I , alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I , et on a :

$$\left(\frac{\alpha}{g}\right)' = \frac{-\alpha \cdot g'}{g^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Exemple

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , et soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

La fonction f^n est dérivable sur I , et on a : $(f^n)' = n \cdot f' \cdot f^{n-1}$

Si f est strictement positive sur I , alors la fonction \sqrt{f} est dérivable sur I , et on a :

$$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

Exemple

Propriété 3 (Dérivée de la fonction Réciproque)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de \mathbb{R} , et soit $a \in I$

Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$

Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de \mathbb{R}

Si f est dérivable sur I telle que la fonction f' ne s'annule pas sur I , alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$.

De plus pour tout $x \in J$ on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Exemple

IV- Applications de la dérivation

4-1/ Variations d'une fonction

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , alors:

f est croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) : f'(x) \geq 0$

f est strictement croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) : f'(x) > 0$

f est décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) : f'(x) \leq 0$

f est strictement décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) : f'(x) < 0$

f est constante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) : f'(x) = 0$

Exemple

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , alors :

Si f' est positive sur I , et ne s'annule qu'en un nombre fini des points, alors f est strictement croissante sur I .

Si f' est négative sur I , et ne s'annule qu'en un nombre fini des points, alors f est strictement décroissante sur I .

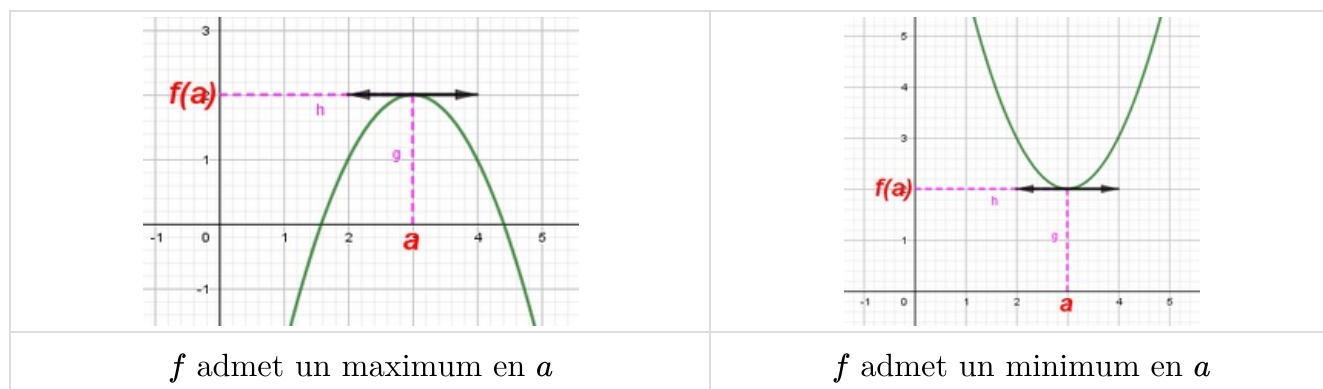
Exemple

4-2/ Valeur minimale et maximale

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , et soit $a \in I$

Si f admet un extremum en un point a , alors $f'(a) = 0$



Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , et soit $a \in I$

Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum en a .

Exemple

4-3/ Étude de la concavité d'une courbe

Définition

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , alors:

Pour que la courbe de f soit convexe sur I , il faut et il suffit que $(\forall x \in I) : f''(x) \geq 0$

Pour que la courbe de f soit concave sur I , il faut et il suffit que $(\forall x \in I) : f''(x) \leq 0$

Pour que le point $m(a, f(a))$ soit un point d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_f , il faut et il suffit que la dérivée seconde f'' s'annule en a , et change de signe de part et d'autre de a .

Exemple

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

Étudier la dérivabilité de la fonction f en a dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{l} 1 - f(x) = x^2 + x \text{ et } a = 3 \\ 2 - f(x) = \sqrt{3+x} \text{ et } a = 1 \\ 3 - \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x+1} & (x \neq -1) \\ f(-1) = 2 \end{cases} \text{ et } a = -1 \end{array}$$

5-2/ Exercice 2

Pour chacun des cas suivants indiquer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f puis déterminer f' :

$$\begin{array}{l} 1 - f(x) = 3x^7 - 4x^3 - 6x - 1 \\ 2 - f(x) = \sqrt{x} - \frac{5}{x} \\ 3 - f(x) = (2x - 3)(x^2 + 5) \\ 4 - f(x) = \frac{1}{x^4} + 3x + 1 \\ 5 - f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \\ 6 - f(x) = \left(\frac{1}{x} + x^2\right)^4 \\ 7 - f(x) = \sqrt{2x^2 + 3} \end{array}$$

5-3/ Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$

1. Étudier les variations de la fonction f

Soit g la restriction de f sur $[1, +\infty[$

2. Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $2 < \alpha < 3$
4. Montrer que : $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$

5-4/ Exercice 4

En utilisant la fonction dérivée, étudier les variations de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$1 - f(x) = x^2 + 4x - 1$$

$$2 - f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$3 - f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$$

5-5/ Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 4x^3 - x^2 - 1$

1. Déterminer \mathcal{D}_f
2. Déterminer f' la fonction dérivée de la fonction f .
3. Donner le tableau de variations de la fonction f .
4. Déterminer les extremums de la fonction f .
5. Etudier la concavité de \mathcal{C}_f .

5-6/ Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + \sqrt{x-1}$

1. Montrer que f est dérivable sur $]1; +\infty[$ puis calculer $f'(x)$.
2. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
3. Calculer $f(2)$, montrer que f^{-1} est dérivable en 3 , puis calculer $(f^{-1})'(3)$.
4. Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x .