Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Séance 8 (Primitive d'une fonction numérique)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Primitive d'une fonction numérique sur un intervalle

1-1 Définition

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que F est une primitive de la fonction f sur I si F est dérivable sur I et
$\forall x \in I \ : \ F'(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x})$

Exemple

1-2/ Proposition 1

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f admet des primitives sur I.

1-3/ Proposition 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si F est une primitive de la fonction f sur I alors les primitives de sur I sont les fonctions $x \to F(x) + c \, ; \ (c \in \mathbb{R})$

- soient $x_0 \in I \ et \ y_0 \in \mathbb{R}$; il existe une seule fonction primitive G de f qui vérifie la condition $G(x_0) = y_0$.

1-4/ Proposition 3

F et G sont les primitives respectivement de f et g sur I.

On a $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\alpha F+\beta G$ est une primitive de $\alpha f+\beta g$.

II- primitives usuelles et opérations

2-1/ Tableau des primitives usuelles

Les primitives F	Fonction f
$x \mapsto c$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto ax + c$	$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$
$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$
$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$
$x \mapsto -\frac{1}{x} + c$	$x \mapsto \frac{1}{x^2}$
$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N}^* \setminus \{-1\})$

2-2/ Fonctions primitives et opérations

Les primitives F	Fonction f
$\frac{1}{r+1}U^{n+1} + c$	$U' \times U^n \ (n \in \mathbb{N})$
$-\frac{1}{U}$	$\frac{U'}{U^2} (U \neq 0)$
$2\sqrt{U}$	$\frac{U'}{\sqrt{U}} \ (U > 0)$
$\frac{-1}{(n-1)U^{n-1}}$	$\frac{U'}{U^n} (n \in \mathbb{N}^* \setminus \{-1\})$

III- Exercices

3-1/ Exercice 1

Soit f et F deux fonctions numériques.

Montrer que F est une primitive de f sur I dans les cas suivants :

$$① \begin{pmatrix} F(x) = x^3 + \frac{1}{x} + 4 \\ f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} \\ I = \mathbb{R}^* \end{pmatrix}$$

$$② \begin{pmatrix} F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \sqrt{x} + 4 \\ f(x) = x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ I =]0, +\infty[\end{pmatrix}$$

$$③ \begin{pmatrix} F(x) = \frac{(x^2+1)^3}{3} \\ f(x) = 2x(x^2+1)^2 \\ I =]0, +\infty[\end{pmatrix}$$

3-2/ Exercice 2

Soient f et F deux fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$$
$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x$$
$$I = \mathbb{R}$$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer G l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la primitive de f qui vérifie $G(0) = 1$.

3-3/ Exercice 3

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 4x^4 + 3x^3 + x \;;\; I = \mathbb{R}$ $f_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 \;;\; I = \left]0, +\infty\right[$ $f_3(x) = 2x^5 - 3x^2 - 1 \;;\; I = \mathbb{R}$ $f_4(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{3x^5} \;;\; I = \mathbb{R}^*$ $f_5(x) = 2x(x^2+1)^3 \;;\; I = \mathbb{R}$	$f_6(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \;;\; I = \mathbb{R}$ $f_7(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \;;\; I = \mathbb{R}$ $f_8(x) = x\left(x^2+1\right) \;;\; I = \mathbb{R}$ $f_9(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x} - 1\right)^3 \;;\; I = \mathbb{R}^*$

3-4/ Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]-1;1[$ par : $f(x) = \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

1. Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = \frac{ax}{(x^2-1)^2} - \frac{b}{(x-1)^2}$.
2. En déduire toutes les primitives de f sur $]-1;1[$.
3. Déterminer la primitive F de la fonction f qui vérifie $F(0) = 1$.