Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Séance 2 (Continuité – Partie 1)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Continuité en un point et continuité sur un intervalle

1-1/ Continuité en un point

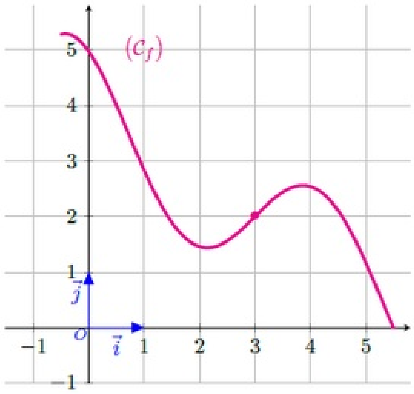
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I

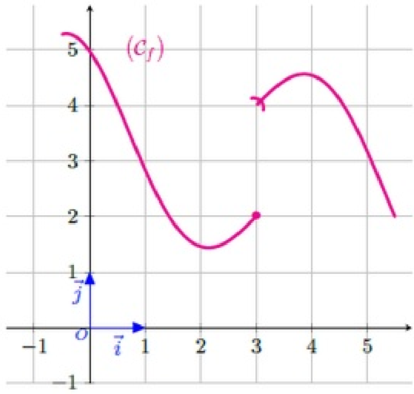
f est continue en a, si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Exemples

▶ **Graphiquement**, dire que f est continue en x_0 signifie que sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ ne présente aucun saut au point $M(x_0; f(x_0))$.



- f est **continue** en $x_0 = 3$
$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) = 2$



- f est **n'est pas continue** en $x_0 = 3$
$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \neq f(3) = 2$

1-2/ Continuité à droite – Continuité à gauche

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a; a+\alpha[$ avec $\alpha > 0$, alors

f est continueà droite en a, si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a-\alpha; a]$ avec $\alpha > 0$, alors

f est continue à gauche en a, si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

Exemple

Propriété

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

La fonction f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.

c-à-d :

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

Exemple

1-3/ Continuité sur un intervalle

Définition

f est continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$ si f est continue en tous points de cet intervalle

f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et continue à droite en a, et à gauche en b.

Propriétés

Les fonctions polynômes sont continue sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$

Exemples

Remarque

- Graphiquement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe sans lever le crayon sur cet intervalle

- Toute fonction continue sur un intervalle I, sa restriction est continue sur tout intervalle inclus dans I.

Exemple

1-4/ Les opérations sur les fonctions continues

propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$

- Les fonctions $(f+g)$ et $(f.g)$ et $(k.f)$ sont continus sur I

- Si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continués sur I

- Si la fonction f est continue et positive sur un intervalle I, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Exemples

II- Image d'un intervalle par une fonction continue

2-1/ Image d'un intervalle

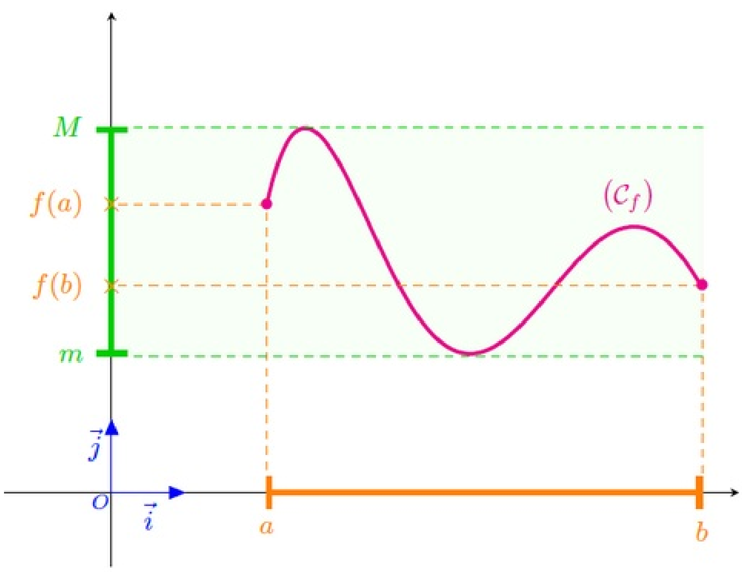
Propriété

- Si f une fonction numérique continue sur un intervalle I, alors son image par f est un intervalle.

- Si f une fonction numérique continue sur un segment $[a;b]$, alors son image par f est un segment $[m;M]$,

où m et M sont, respectivements, les valeurs minimale et maximale de f sur le segment $[a;b]$.

Géométriquement



Exemple :

2-2/ Cas d'une fonction continue et strictement monotone

Si f est une fonction strictement croissante :

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x);f(b)\right]$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$

Si f est une fonction strictement décroissante :

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$
$[a;b]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x);f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x);\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$

Exemple

III- Exercices

3-1/ Exercice 1

Étudier la continuité de f en a dans chaque cas :

$$\text{A- }\begin{cases} f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}\ ;\ x\neq -1 \\ f(-1)=0 \end{cases};\ a=-1$$

$$\text{B- }\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}\ ;\ x\neq 1 \\ f(1)=-\frac{1}{4} \end{cases};\ a=1$$

$$\text{C- }\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+x-2}\ ;\ x\neq 1 \\ f(1)=\frac{1}{12} \end{cases};\ a=1$$

3-2/ Exercice 2

A- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 + \sqrt{5-x} \; ; \; x \leq 4 \\ f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \; ; \; x > 4 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f à gauche et à droite en 4
2. Est-ce que f est continue en 4 ?

B- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{pmatrix} g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} \; ; \; x > 0 \\ g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \; ; \; x < 0 \\ g(0) = 0 \end{pmatrix}$$

1. Étudier la continuité de g en 0

3-3/ Exercice 3

A- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 2x \; ; \; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1} \; ; \; x > 1 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en 1
2. Étudier la continuité de f sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$
3. Est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}$?

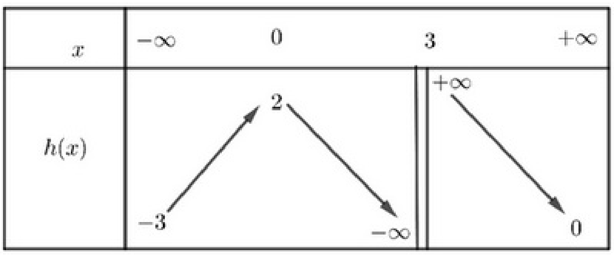
B- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{1-x} \; ; \; x \leq 1 \\ g(x) = \sqrt{x^2+1} \; ; \; x > 1 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de g sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$
2. Étudier la continuité de g en 1
3. Est-ce que g est continue sur $\mathbb{R}$?

3-4/ Exercice 4

Soit h une fonction numérique continue sur chacun des intervalles $]-\infty; 3[$ et $]3; +\infty[$ et dont le tableau de variations est donné par :



1. Déterminer les images des intervalles suivants par la fonction h :

$$]-\infty; 0[\;\; ; \;\; [0; 3[\;\; ; \;\;]-\infty; 3[\;\; ; \;\;]3; +\infty[$$

3-5/ Exercice 5

1. Justifier la continuité de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

$$1\ \ f(x) = \left(x^2 - 5\right)^4 \ ;\ I = \mathbb{R}$$
$$2\ \ f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} \ ;\ I = \mathbb{R}^*$$
$$3\ \ f(x) = \left(\frac{3x-4}{x-1}\right)^2 \ ;\ I = \left]1;+\infty\right[$$
$$4\ \ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ ;\ I = \left]-\infty;0\right]$$
$$5\ \ f(x) = \sqrt{x^2+3}\ ;\ I = \mathbb{R}$$

3-6/ Exercice 6

f est la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^3+1}-3}{x-2} \ ;\ x \neq 2 \\ f(2) = m \end{cases}$

1. Déterminer la valeur de m pour que f soit continue en 2