

Sommaire**I- Continuité en un point et continuité sur un intervalle**

1-1/ Continuité en un point

1-2/ Continuité à droite – Continuité à gauche

1-3/ Continuité sur un intervalle

1-4/ Les opérations sur les fonctions continues

II- Image d'un intervalle par une fonction continue

2-1/ Image d'un intervalle

2-2/ Cas d'une fonction continue et strictement monotone

III- Exercices

3-1/ Exercice 1

3-2/ Exercice 2

3-3/ Exercice 3

3-4/ Exercice 4

3-5/ Exercice 5

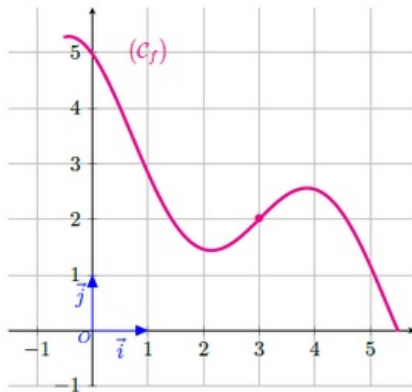
3-6/ Exercice 6

I- Continuité en un point et continuité sur un intervalle

1-1/ Continuité en un point

DéfinitionSoit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I f est continue en a , si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ **Exemples**

► Graphiquement, dire que f est continue en x_0 signifie que sa courbe représentative (C_f) ne présente aucun saut au point $M(x_0; f(x_0))$.



- f est continue en $x_0 = 3$
 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 2$



- f est n'est pas continue en $x_0 = 3$
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq f(3) = 2$

1-2/ Continuité à droite – Continuité à gauche

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a; a + \alpha[$ avec $\alpha > 0$, alors f est continue à droite en a , si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a - \alpha; a]$ avec $\alpha > 0$, alors f est continue à gauche en a , si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Exemple

Propriété

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

La fonction f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a .

c-à-d :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Exemple

1-3/ Continuité sur un intervalle

Définition

f est continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$ si f est continue en tous points de cet intervalle

f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et continue à droite en a , et à gauche en b .

Propriétés

Les fonctions polynômes sont continue sur \mathbb{R} .

Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$

Exemples

Remarque

- Graphiquement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe sans lever le crayon sur cet intervalle
- Toute fonction continue sur un intervalle I , sa restriction est continue sur tout intervalle inclus dans I .

Exemple

1-4/ Les opérations sur les fonctions continues

propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$

- Les fonctions $(f + g)$ et $(f \cdot g)$ et $(k \cdot f)$ sont continues sur I
- Si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continus sur I
- Si la fonction f est continue et positive sur un intervalle I , alors la fonction \sqrt{f} est continue sur I .

Exemples

II- Image d'un intervalle par une fonction continue

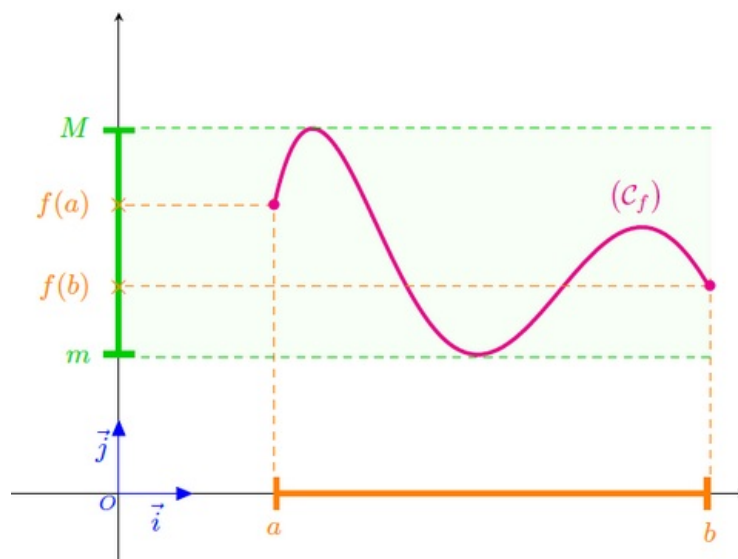
2-1/ Image d'un intervalle

Propriété

- Si f une fonction numérique continue sur un intervalle I , alors son image par f est un intervalle.
- Si f une fonction numérique continue sur un segment $[a; b]$, alors son image par f est un segment $[m; M]$,

où m et M sont, respectivement, les valeurs minimale et maximale de f sur le segment $[a; b]$.

Géométriquement



Exemple :

2-2/ Cas d'une fonction continue et strictement monotone

Si f est une fonction strictement croissante :

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$
$[a; b[$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$
$]a; b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$
$]a; b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$

Si f est une fonction strictement décroissante :

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$
$[a; b]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$
$]a; b]$	$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]a; b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$

Exemple

III- Exercices

3-1/ Exercice 1

Étudier la continuité de f en a dans chaque cas :

$$A- \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} ; x \neq -1 ; a = -1 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

$$B- \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} ; x \neq 1 ; a = 1 \\ f(1) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$C- \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+x-2} ; x \neq 1 ; a = 1 \\ f(1) = \frac{1}{12} \end{cases}$$

3-2/ Exercice 2

A- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 + \sqrt{5-x} ; x \leq 4 \\ f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x-2}} ; x > 4 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f à gauche et à droite en 4
2. Est-ce que f est continue en 4 ?

B- Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} ; x > 0 \\ g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} ; x < 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de g en 0

3-3/ Exercice 3

A- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 2x ; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1} ; x > 1 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en 1
2. Étudier la continuité de f sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$
3. Est-ce que f est continue sur \mathbb{R} ?

B- Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{1-x} ; x \leq 1 \\ g(x) = \sqrt{x^2+1} ; x > 1 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de g sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$
2. Étudier la continuité de g en 1
3. Est-ce que g est continue sur \mathbb{R} ?

3-4/ Exercice 4

Soit h une fonction numérique continue sur chacun des intervalles $]-\infty; 3[$ et $]3; +\infty[$ et dont le tableau de variations est donné par :

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$h(x)$	-3	2	$+\infty$	0

1. Déterminer les images des intervalles suivants par la fonction h :

$$]-\infty; 0[; [0; 3[;]-\infty; 3[;]3; +\infty[$$

3-5/ Exercice 5

1. Justifier la continuité de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

$$1 \quad f(x) = (x^2 - 5)^4 ; I = \mathbb{R}$$

$$2 \quad f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} ; I = \mathbb{R}^*$$

$$3 \quad f(x) = \left(\frac{3x-4}{x-1}\right)^2 ; I =]1; +\infty[$$

$$4 \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} ; I =]-\infty; 0]$$

$$5 \quad f(x) = \sqrt{x^2+3} ; I = \mathbb{R}$$

3-6/ Exercice 6

f est la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^3+1}-3}{x-2} ; x \neq 2 \\ f(2) = m \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de m pour que f soit continue en 2