Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Séance 1 (Limites (Rappel))

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Limites usuelles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} ax^n = (signe\ de\ a)\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} ax^n = (signe\ de\ -a)\infty\ si\ n\ est\ impair$$
$$\lim_{x \to -\infty} ax^n = (signe\ de\ a)\infty\ si\ n\ est\ pair$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Exemples

II- Limite d'une fonction polynomiale

2-1/ Propriété 1

Si f est une fonction polynomiale, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemple

2-2/ Propriété 2

La limite d'un polynôme en ∞ est celle de son terme de plus haut degré

Exemples

III- Limite d'une fonction rationnelle

3-1/ Propriété 1

La limite d'une fonction rationnelle en ∞ est celle du quotient des termes de plus haut degré

3-2/ Propriété 2

Soit une fonction rationnelle tel que: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

On a : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \frac{p(a)}{q(a)}$

Si $p(a) = q(a) = 0$ (càd a est une racine de $p(x)$ et $q(x)$), alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)p_1(a)}{(x-a)q_1(a)} = \lim_{x \to a} \frac{p_1(a)}{q_1(a)}$$

IV- Limite d'une fonction irrationnelle

4-1/ Propriété 1

Si $\lim\limits_{x \to ?} f(x) = a$ avec $(a \geq 0)$, alors $\lim\limits_{x \to ?} \sqrt{f(x)} = \sqrt{a}$

Si $\lim\limits_{x \to ?} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to ?} \sqrt{f(x)} = +\infty$

V- Opérations sur les limites

5-1/ Limite de la somme de deux fonctions

a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, L et M sont deux nombres réels.

$\lim_{x\to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	M	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$L+M$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

5-2/ Limite du produit de deux fonctions

a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, L et M sont deux nombres réels.

$\lim_{x\to a} f(x)$	L	$L\neq 0$	∞	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	M	∞	∞	∞
$\lim_{x\to a} (f(x)\times g(x))$	$L\times M$	∞	∞	F.I

5-3/ Limite du quotient de deux fonctions

a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, L et M sont deux nombres réels.

$\lim_{x\to a} f(x)$	L	$L\neq 0$	∞	∞	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	$M\neq 0$	0	M	∞	0
$\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{L}{M}$	∞	∞	F.I	F.I

VI- Limites et ordre

6-1/ Théorème 1

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

Si $(\forall x\in I)\ ;\ f(x)\geq g(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$ alors $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$

Si $(\forall x\in I)\ ;\ f(x)\leq g(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)=-\infty$ alors $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$

6-2/ Théorème des gendarmes

Soient f et g et h trois fonctions définies sur un intervalle I et k un réel.

Si $(\forall x\in I)\ ;\ g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=k$ alors $\lim_{x\to a} f(x)=k$

Lemme

Si $(\forall x\in I)\ ;\ |f(x)-k|\leq g(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)=0$ alors $\lim_{x\to a} f(x)=k$

Exemples

VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$$A = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 1$$
$$B = \lim_{x \to +\infty} 2x + 5x^2 - 7x^3$$
$$C = \lim_{x \to -\infty} 3x^2 + x - 3$$
$$D = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 - x^2 + x$$
$$E = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+7x^3}$$
$$F = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2+x-1}{(x-1)^2}$$
$$G = \lim_{x \to 2} \frac{x-4}{(2x-3)^3}$$

7-2/ Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

$$A = \lim_{x \to 1} \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$$
$$B = \lim_{x \to 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2}$$
$$C = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-x}{2x^2+2x-4}$$
$$D = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-x}{2x^2+2x-4}$$
$$E = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-9x+8}$$

7-3/ Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

$$A = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$$
$$B = \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{1+x}$$
$$C = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$$
$$D = \lim_{x \to -1} \frac{3x^2-x-4}{\sqrt{x+5}-2}$$

7-4/ Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

$$A = \lim_{x \to +\infty} x - \sqrt{x}$$
$$B = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^4 - 2x^3 + 1} - x$$
$$C = \lim_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2 + 1}$$
$$D = \lim_{x \to +\infty} 2x - \sqrt{x^2 + 3}$$

7-5/ Exercice 5

Soit f une fonction Définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2} \ ; \ x > 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2} \ ; \ x < 2 \\ f(2) = \frac{8}{3} \end{cases}$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

7-6/ Exercice 6

Soit f une fonction Définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x-5} \ ; \ x \neq 5 \\ f(5) = 4 \end{cases}$

1. Déterminer puis calculer $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.
2. Montrer que f est dérivable en $x_0 = 5$.
3. Déterminer l'équation de (T) la tangente à $\left(\mathscr{C}_f\right)$ en 5.