

Sommaire

I- Applications de la fonction dérivée première

1-1/ La monotonie d'une fonction et le signe de sa fonction dérivée

1-2/ Extremums d'une fonction dérivable

II- Applications de la fonction dérivée seconde

2-1/ Position relative de la tangente et la courbe – la concavité

2-2/ Points d'inflexions

III- Centre de symétrie – axe de symétrie de la courbe d'une fonction

3-1/ Centre de symétrie de la courbe d'une fonction

3-2/ Axe de symétrie de la courbe d'une fonction

IV- Branches infinies d'une fonction

4-1/ Branches infinies

4-2/ Asymptote verticale

4-3/ Asymptote horizontale

4-4/ Asymptote oblique

V- Bilan des branches infinies

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

6-5/ Exercice 5

6-6/ Exercice 6

I- Applications de la fonction dérivée première

1-1/ La monotonie d'une fonction et le signe de sa fonction dérivée

Propriété

f est une fonction dérivable sur un intervalle I

Si la fonction dérivée f' est strictement positive sur I , alors la fonction f est strictement croissante sur I .

(même si f' s'annule en un points fini de I , ça ne change pas la monotonie de f)

Si la fonction dérivée f' est strictement négative sur I , alors la fonction f est strictement décroissante sur I .

(même si f' s'annule en un points fini de I , ça ne change pas la monotonie de f)

Si la fonction f' est nulle sur I tout entier, alors f est constante.

Exemple

1-2/ Extremums d'une fonction dérivable

Propriété 1

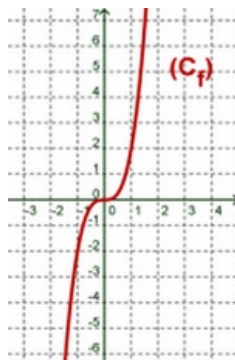
f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , a est un élément de I .

Si f est dérivable au point a et admet un extremum au point a alors $f'(a) = 0$.

Remarque

$f'(a) = 0$ ne signifie pas que $f(a)$ est un extremum de la fonction f .

Exemple



Propriété 2

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , a est un élément de I .

Si f' s'annule au point a et f' change de signe au voisinage de a alors $f(a)$ est un extremum de la fonction f .

Exemple

II- Applications de la fonction dérivée seconde

2-1/ Position relative de la tangente et la courbe – la concavité

Propriété et définition

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

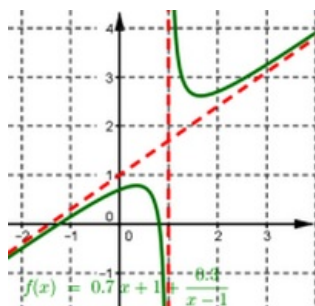
Si $\forall x \in I : f''(x) > 0$, alors la courbe (\mathcal{C}_f) est située au dessus des tangentes des points x tel que $x \in I$.

Dans ce cas on dit que la courbe (\mathcal{C}_f) de f est convexe (ou sa concavité est dans le sens des ordonnées positives. On note \cup).

Si $\forall x \in I : f''(x) < 0$, alors la courbe (\mathcal{C}_f) est située au dessous des tangentes des points x tel que $x \in I$.

Dans ce cas on dit que la courbe (\mathcal{C}_f) de f est concave (ou sa concavité est dans le sens des ordonnées négatives. On note \cap).

Exemple



2-2/ Points d'inflexions

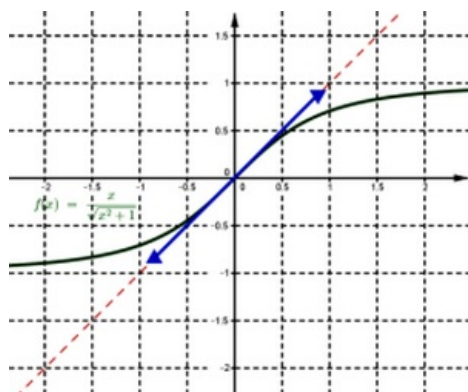
Propriété et définition

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , et $x_0 \in I$.

Si la fonction dérivée seconde f'' s'annule en x_0 et f'' change de signe au voisinage de x_0 , alors le point $A(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion au courbe (\mathcal{C}_f) .

Dans ce cas la tangente au point $A(x_0, f(x_0))$ coupe (ou traverse) la courbe (\mathcal{C}_f) .

Exemple



III- Centre de symétrie – axe de symétrie de la courbe d'une fonction

3-1/ Centre de symétrie de la courbe d'une fonction

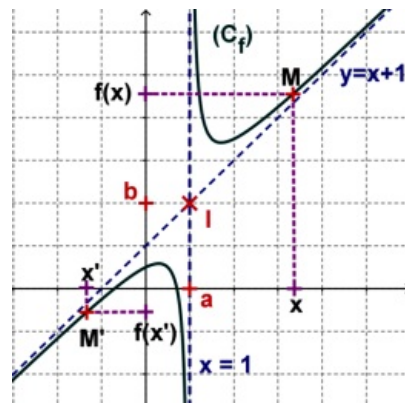
Propriété

Soit (\mathcal{C}_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Le point $I(a, b)$ est centre de symétrie de la courbe

$$(\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f ; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f ; f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$$

Exemple



3-2/ Axe de symétrie de la courbe d'une fonction

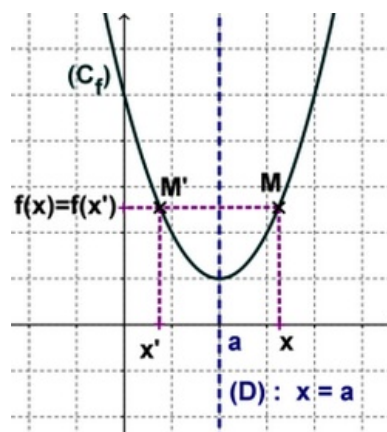
Propriété

Soit (\mathcal{C}_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

La droite d'équation $D : x = a$ est axe de symétrie de la courbe

$$(\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f ; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f ; f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

Exemple



IV- Branches infinies d'une fonction

4-1/ Branches infinies

Définition

Soit (\mathcal{C}_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Si au moins une des coordonnées d'un point M de la courbe de (\mathcal{C}_f) tend vers l'infinie, on dit que la courbe (\mathcal{C}_f) admet une branche infinie.

Exemple

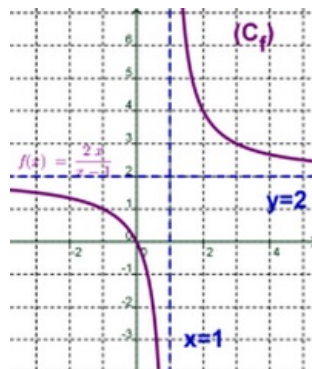
4-2/ Asymptote verticale

Définition

Soit (\mathcal{C}_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à (\mathcal{C}_f) (à droite de a ou à gauche de a).

Exemple



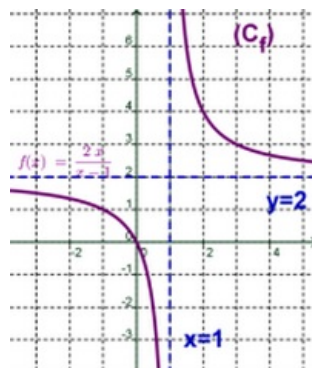
4-3/ Asymptote horizontale

Définition

Soit (\mathcal{C}_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$), alors la droite d'équation $y = b$ (ou $y = c$) est une asymptote horizontale à (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$)

Exemple



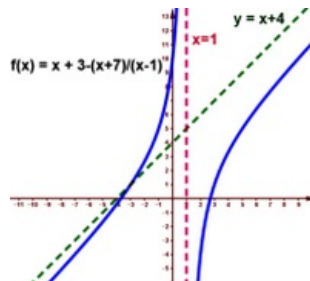
4-4/ Asymptote oblique

Définition

Soit (\mathcal{C}_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f (tel que $]a, +\infty[\subset D_f$ ou $]-\infty, a[\subset D_f$) dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (\mathcal{C}_f) au voisinage de $\pm\infty$.

Exemple



Propriétés

Si la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (\mathcal{C}_f) au voisinage de $\pm\infty$, donc pour déterminer a et b on calcule les limites suivantes :

Pour déterminer a on calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$

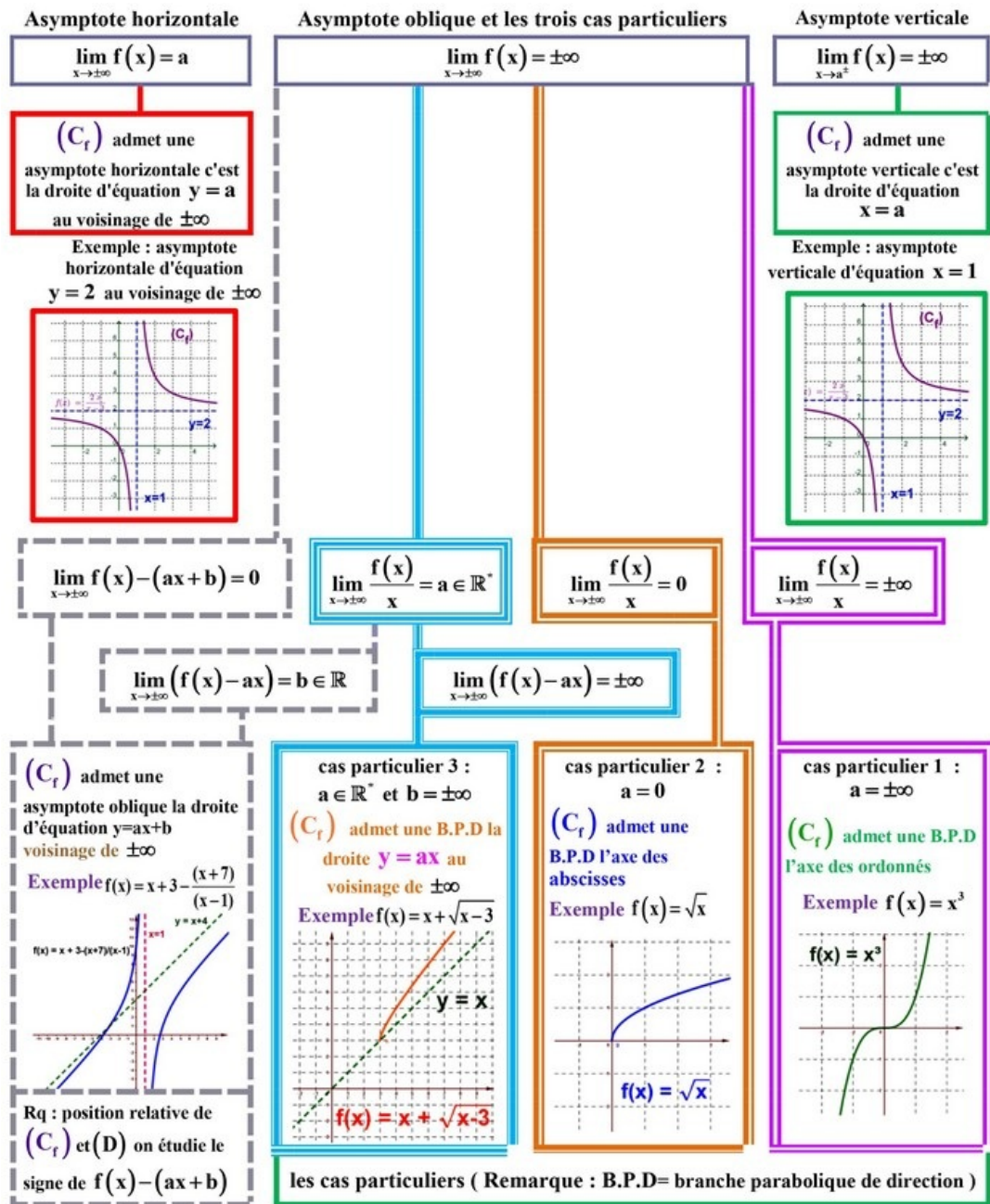
Pour déterminer b on calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R} \ (b \neq \pm\infty)$

Les cas particuliers :

- 1er cas particulier : $a = \pm\infty$, on dit que (\mathcal{C}_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés.
- 2nd cas particulier : $a = 0$, on dit que (\mathcal{C}_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses .
- 3ème cas particulier : $b = \pm\infty$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, on dit que (\mathcal{C}_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.

Exemples

V- Bilan des branches infinies



VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$, et soit (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité de 1 cm).

1.
 - a- Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .
 - b- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, puis interpréter géométriquement le deuxième résultat.
 - c- Montrer que la courbe (\mathcal{C}_f) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera son équation.
 - d- Étudier la position relative de la courbe (\mathcal{C}_f) et la droite (Δ) .
- 2.

- a- Montrer que $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ pour tout x de D_f .
- b- Montrer que pour tout x de $] -1, 0]$ on a $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} \geq 1$, puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $] -1, 0]$.
- c- Montrer que pour tout x de $[0, +\infty[$ on a $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} \leq 1$, puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0, +\infty[$.
- d- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f .
- e- Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}_f) au point $x_0 = 0$.

4. Construire la droite (Δ) et la tangente (T) et la courbe (\mathcal{C}_f) de f dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

5.

- a- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J qu'on déterminera.
- b- Montrer que la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur l'intervalle J .
- c- Construire dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} .

6-2/ Exercice 2

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$, et soit (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité de 2 cm).

1.

- a- Montrer que f est définie sur $D_f = \mathbb{R}$.
- b- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement les deux résultats.

2.

- a- Montrer que $f'(x) = \frac{1}{(x^2-2x+2)\sqrt{x^2-2x+2}}$ pour tout x de \mathbb{R} .
- b- Montrer que la fonction f est croissante sur D_f .
- c- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

3.

- a- Montrer que le point $I(1; 0)$ est un centre de symétrie de la courbe (\mathcal{C}_f) .
- b- Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}_f) au point I .

4. Construire la tangente (T) et la courbe (\mathcal{C}_f) de f dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

5.

- a- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J qu'on déterminera.

b- Construire dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} .

c- Calculer $f(1)$, puis montrer que la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en 0 puis calculer $(f^{-1})'(0)$.

6-3/ Exercice 3

On considère la fonction numérique f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} ; x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[\\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité de 2 cm).

1.

a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat.

b- Étudier la continuité de la fonction f au point $x_0 = 1$.

2.

a- Montrer que la fonction f est dérivable au point $x_0 = 1$ et le nombre dérivé est $f'(1) = -\frac{1}{8}$.

b- Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}_f) au point $x_0 = 1$.

c- Étudier la dérivabilité à droite de la fonction f au point $x_0 = 0$.

d- Vérifier la fonction dérivée de f sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ est $f'(x) = \frac{-(\sqrt{x-1})^2}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$.

e- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

3. Construire la courbe (\mathcal{C}_f) de f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère g la restriction de la fonction f sur $I = [0, +\infty[$.

4) a- Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J qu'on déterminera.

4) b- Calculer $g(4)$ puis montrer que la fonction réciproque g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{3}$ puis calculer $(g^{-1})'(\frac{1}{3})$.

6-4/ Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie sur $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^4}{x^3+x^2} ; x \neq -1 \text{ et } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit (\mathcal{C}_f) la courbe représentative de la fonction dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

(unité de 1 cm).

1.

- a- Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats.
- b- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1)$ puis interpréter géométriquement les résultats.
- c- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- d- Montrer que (\mathcal{C}_f) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ dont on déterminera l'équation.
- e- Étudier la position relative de la courbe (\mathcal{C}_f) et la droite (D) d'équation $y = x - 1$ sur D_f .

2.

a- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

b- Calculer $f'(x)$ pour tout x de $] -\infty, -1[\cup] -1, 0[\cup] 0, +\infty[$, puis vérifier que $f'(x) = \frac{x^5(x+2)}{(x^3+x^2)^2}$.

c- Étudier le signe de $f'(x)$ sur $] -\infty, -1[\cup] -1, 0[\cup] 0, +\infty[$.

d- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f .

e- Écrire l'équation réduite de la tangente à (\mathcal{C}_f) au point $x_0 = 0$.

3. Construire dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la droite (D) et la courbe (\mathcal{C}_f) (unité de 1 cm).

On considère g la restriction de la fonction f sur $I =] -1, 0]$.

4) a- Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J qu'on déterminera.

4) b- Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ puis montrer que la fonction réciproque g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{6}$.

4) c- Calculer $(g^{-1})'\left(\frac{1}{6}\right)$.

6-5/ Exercice 5

Soit la fonction : $f(x) = \frac{x(x^2+1)}{x^2-1}$

Soit (\mathcal{C}_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Déterminer D_f , puis étudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f . Justifier les réponses.
- Étudier la parité de f et en déduire un élément de symétrie de (\mathcal{C}_f) .
- Étudier les limites de f aux bornes de D_f , et en déduire les asymptotes éventuelles à (\mathcal{C}_f) .
- Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- Étudier la concavité de (\mathcal{C}_f) et résumer cette étude dans un tableau.
- Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (\mathcal{C}_f) au point d'abscisse 0.
- Étudier la position de (\mathcal{C}_f) par rapport à (T) .
- Tracer (\mathcal{C}_f) et (T) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

6-5/ Exercice 6

Partie 1

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$. et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
2. Vérifier que : $g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
3. En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}); g(x) > 0$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}$.

1. Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = g(x)$.
2. Dresser le tableau de variation de f .
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4. Montrer que la droite $(D) : y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$.
5. Tracer (\mathcal{C}_f) et (D) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .