

Sommaire

I- Dérivabilité d'une fonction en un point  $x_0$  – Dérivabilité à droite et à gauche en un point  $x_0$

1-1/ Dérivabilité

1-2/ Interprétation géométrique des nombres dérivées  $f'(x_0)$  et  $f'_d(x_0)$  et  $f'_g(x_0)$

II- Dérivabilité sur un intervalle

III- La fonction dérivée première d'une fonction – la fonction dérivée seconde – dérivée nième d' une fonction

IV- Les opérations sur les fonctions dérivables

V- Dérivabilité des fonctions polynomiales, rationnelles, trigonométriques et  $f^n(x)$

VI- Dérivabilité de la composée de deux fonctions

VII- La fonction dérivée de la fonction réciproque

IIIX- Tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles

IX- Exercices

9-1/ Exercice 1

9-2/ Exercice 2

9-3/ Exercice 3

9-4/ Exercice 4

9-5/ Exercice 5

9-6/ Exercice 6

---

I- Dérivabilité d'une fonction en un point  $x_0$  – Dérivabilité à droite et à gauche en un point  $x_0$

## 1-1/ Dérivabilité

### Définitions

Soit une fonction  $f$  tel que son domaine de définition contient un intervalle ouvert  $I$  et  $x_0 \in I$

$f$  est dérivable au point  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l \in \mathbb{R} \right)$

$l = f'(x_0)$  s'appelle le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$

$f$  est dérivable à droite de  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R} \left( \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l \in \mathbb{R} \right)$

$l = f'_d(x_0)$  s'appelle le nombre dérivé à gauche de  $f$  en  $x_0$

$f$  est dérivable à gauche de  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R} \left( \lim_{h \rightarrow 0^-} \lim \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l \in \mathbb{R} \right)$

$l = f'_g(x_0)$  s'appelle le nombre dérivé à gauche de  $f$  en  $x_0$

### Exemple

### Propriété

Soit une fonction  $f$

$f$  est dérivable au point  $x_0 \Leftrightarrow f$  est dérivable à droite et à gauche et  $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

### Exemple

## 1-2/ Interprétation géométrique des nombres dérivées $f'(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$

### Interprétation géométrique des nombres dérivées $f'(x_0)$

$f$  est une fonction dérivable au point  $x_0$ .

$(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

Le nombre dérivé  $f'(x_0)$  est le coefficient directeur de la droite tangente  $(T)$  à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au point  $A(x_0, f(x_0))$  (le point  $x_0$ ).

L'équation cartésienne de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au point  $x_0$  est

$(T) : y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$ .

Si  $f'(x_0) = 0$  alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

### Exemple

### Interprétation géométrique des nombres dérivées $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$

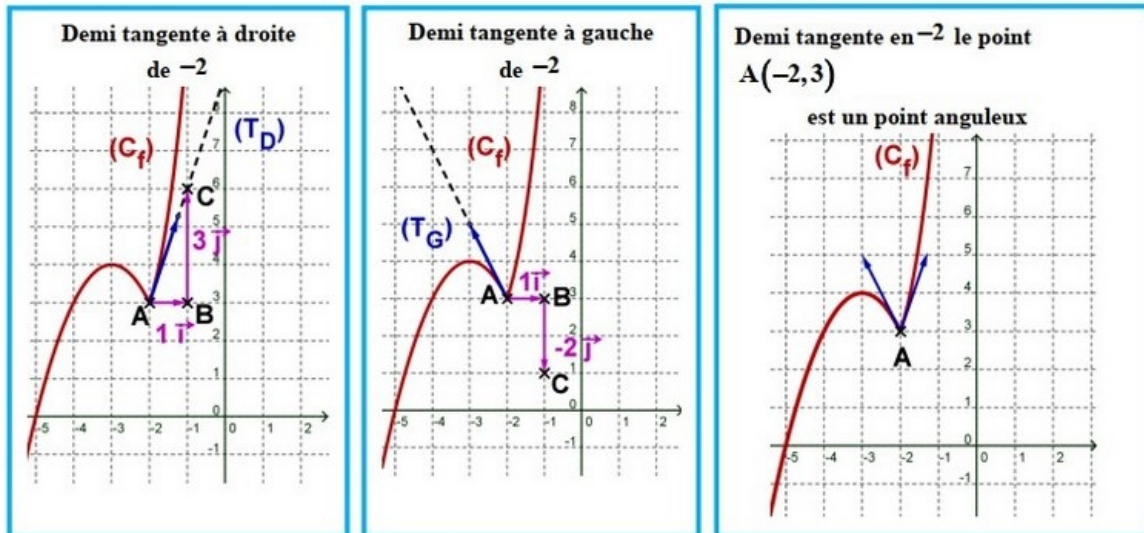
Si  $f$  est dérivable à droite de  $x_0$ , alors on a une demi-tangente à droite de  $x_0$  de coefficient directeur  $f'_d(x_0)$ .

L'équation de la demi tangente à droite de  $x_0$  est  $(T_d) : y = (x - x_0)f'_d(x_0) + f(x_0)$  avec  $x \geq x_0$ .

Si  $f$  est dérivable à gauche de  $x_0$ , alors on a une demi-tangente à gauche de  $x_0$  de coefficient directeur  $f'_g(x_0)$ .

L'équation de la demi tangente à gauche de  $x_0$  est  $(T_g) : y = (x - x_0)f'_g(x_0) + f(x_0)$  avec  $x \leq x_0$ .

Si  $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ , alors  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0$  et le point  $A(x_0, f(x_0))$  est appelé point anguleux.



### Exemple

### Remarque

Si  $f$  n'est pas dérivable à droite (c.à.d.  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ ), dans ce cas on a une demi tangente à droite de  $x_0$  parallèle à l'axe des ordonnées.

Si  $f$  n'est pas dérivable à gauche (c.à.d.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ ), dans ce cas on a une demi tangente à gauche de  $x_0$  parallèle à l'axe des ordonnées.

### Exemple

## II- Dérivabilité sur un intervalle

### Définitions

$f$  est une fonction dérivable sur  $I = ]a, b[ \Leftrightarrow f$  est dérivable en tout point  $x_0$  de  $I$ .

$f$  est une fonction dérivable sur  $I = [a, b[ \Leftrightarrow f$  est dérivable sur  $I = ]a, b[$  et  $f$  est dérivable à droite du point  $a$ .

$f$  est une fonction dérivable sur  $I = ]a, b] \Leftrightarrow f$  est dérivable sur  $I = ]a, b[$  et  $f$  est dérivable à gauche du point  $b$ .

$f$  est une fonction dérivable sur  $I = [a, b] \Leftrightarrow f$  est dérivable sur  $I = ]a, b[$  et  $f$  est dérivable à droite de  $a$  et à gauche de  $b$ .

### Exemple

## III- La fonction dérivée première d'une fonction – la fonction dérivée seconde – dérivée nième d'une fonction

## Définitions

$f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

La fonction  $g$  qui relie chaque élément  $x$  de  $I$  par le nombre  $f'(x)$  s'appelle la fonction dérivée de  $f$  et on note  $g = f'$ .

$g$  s'appelle la fonction dérivée de  $f$ .

La fonction dérivée de  $f'$  sur  $I$  s'appelle la fonction dérivée seconde (dérivée d'ordre 2), on la note  $f''$  ou  $f^{(2)}$ .

En général : la dérivée d'ordre  $n$  de  $f$  est la fonction dérivée de  $f^{(n-1)}$  (la dérivée de la fonction dérivée d'ordre  $n - 1$ ), et on note  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$ .

## Exemple

## IV- Les opérations sur les fonctions dérivables

### Propriété

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur  $I$ .

On a :

La fonction  $f + g$  est dérivable sur  $I$  et  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

La fonction  $\alpha f$  est dérivable sur  $I$  et  $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$

La fonction  $f \times g$  est dérivable sur  $I$  et  $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

La fonction  $\frac{1}{g}$  est dérivable sur  $I \forall x \in I, g(x) \neq 0$  et  $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$

La fonction  $\frac{f}{g}$  est dérivable sur  $I \forall x \in I, g(x) \neq 0$  et  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = -\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

### Exemple

## V- Dérivabilité des fonctions polynomiales, rationnelles, trigonométriques et $f^n(x)$

### Propriété

Toute fonction polynomiale est dérivable sur son ensemble de définition  $D_f = \mathbb{R}$  et  $(ax^n)' = nax^{n-1}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition  $D_f$ .

$f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  :

La fonction  $f^n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  est dérivable sur  $I$  et on a  $(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$ .

Si pour tout  $x \in I, f(x) \neq 0$ , on a la fonction  $f^p(x)$  avec  $p \in \mathbb{Z}^*$  est dérivable sur  $I$  et  $(f^p)'(x) = pf^{p-1}(x)f'(x)$ .

La fonction  $f(x) = \cos(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec  $f'(x) = -\sin(x)$ .

La fonction  $f(x) = \sin(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec  $f'(x) = \cos(x)$ .

La fonction  $f(x) = \tan(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R} / \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$  avec  $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

## Exemple

## VI- Dérivabilité de la composée de deux fonctions

### Propriété

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $g$  est dérivable en  $f(x_0)$ , alors la fonction  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$  et on a :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

### Application

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2x\sqrt{f(x)}} ; x \in D_f \text{ et } f(x) > 0$$

$$(\sin(ax + b))' = a \cdot \cos(ax + b) ; x \in \mathbb{R}$$

$$(\cos(ax + b))' = -a \cdot \sin(ax + b) ; x \in \mathbb{R}$$

$$(\tan(ax + b))' = a \cdot [1 + \tan^2(ax + b)] = \frac{a}{\cos^2(ax + b)} ; ax + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

## Exemple

## VII- La fonction dérivée de la fonction réciproque

### Théorème

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) \neq 0$ , alors la fonction  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0 = f(x_0)$

$$\text{et } (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\text{ou encore } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

### Application:

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n \times \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$\forall x \in I : \quad \left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{n \times \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$$

## Exemple

## III- Tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles

La fonction $f$	$D_f$ Domaine de définition de $f$	La fonction dérivée $f'$	$D_{f'}$ Domaine de définition de $f'$
$f(x) = a$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}; f(x) = x^n$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$D_f = ]0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'} = ]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$D_f = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$x \in D_g / g(x) \geq 0$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{2 \times \sqrt{g(x)}}$	$x \in D_g / g(x) > 0$
$f(x) = a$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}; f(x) = x^n$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}; f(x) = x^n$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$

## IX- Exercices

### 9-1/ Exercice 1

1. Dans chacun des cas suivantes, étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  en  $x_0$  et interpréter le résultat graphiquement :

$$1 \begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2}{x+1} \text{ si } x \neq -1 \\ f(-1) = 5 \end{cases} ; x_0 = -1$$

$$2 \begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x-1} \text{ si } x < 1 \\ f(x) = x^2 + x - 2 \text{ si } x \geq 1 \end{cases} ; x_0 = 1$$

### 9-2/ Exercice 2

1. Déterminer la fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

$$1 \quad f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$2 \quad f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 1}$$

$$3 \quad f(x) = \left( \frac{x^2 - 2x}{x-1} \right)^4$$

$$4 \quad f(x) = x^3 \times \cos(x^2 - x)$$

$$5 \quad f(x) = x^5 \times \sqrt[3]{x^2 - 3x + 5}$$

### 9-3/ Exercice 3

1. Déterminer la fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

$$1 \quad f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3x^2 + 1}{x}$$

$$2 \quad f(x) = \sqrt{x+2} \times (5x-3)^4$$

$$5 \quad f(x) = \sin 2x \cos 3x$$

$$6 \quad f(x) = \tan 3x$$

$$7 \quad f(x) = \sqrt[3]{x^{\pi}}$$

$$3 \quad f(x) = \sqrt{\frac{3x-5}{2-x}}$$

$$4 \quad f(x) = \sin^3(x)$$

$$8 \quad f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 7x + 12}$$

### 9-4/ Exercice 4

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $f(x) = -x + \sqrt{x^2 - x}$

1. Déterminer  $D_f$  le domaine de définition de la fonction  $f$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .
3. Étudier la dérivabilité à gauche de  $f$  au point  $x_0 = 0$  puis interpréter le résultat graphiquement.
4. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)+1}{x-1}$ , puis interpréter le résultat graphiquement.
5. Montrer que pour tout  $x$  de  $] -\infty, 0[$  on a  $f'(x) = -1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$  puis déterminer son signe sur  $] -\infty, 0[$ .
6. Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $]1, +\infty[$  puis déterminer son signe sur  $]1, +\infty[$ .
7. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $D_f$ .

Soit  $g$  la restriction de la fonction  $f$  à l'intervalle  $] -\infty, 0]$ .

8. Montrer que la restriction  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J$  qu'on déterminera.
9. Calculer  $g(2)$  et  $(g^{-1})'(-2 + \sqrt{2})$ .

### 9-5/ Exercice 5

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-8}{x-2} \text{ si } x \in ]-\infty; 2[ \\ f(x) = \sqrt{x+2} + 10 \text{ si } x \in [2; +\infty[ \end{cases}$$

1. Calculer  $f(2)$  et  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .
2. Est-ce que la fonction  $f$  est continue en 2 ?
3. Étudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
4. Étudier la dérivabilité de  $f$  en 2, et interpréter géométriquement les résultats.

### 9-6/ Exercice 6

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $f(x) = x^3 + 3x - 2$

1. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  a une seule solution  $\alpha$  sur  $[0; +\infty[$ , et que  $\alpha \in ]0; 1[$ .
2. Donner un encadrement d'amplitude 0,125 de  $\alpha$ .
3. En déduire que  $(\forall x \in [0; \alpha]); f(x) \leq 0$  et  $(\forall x \in [\alpha; +\infty]); f(x) \geq 0$ .
4. Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.

5. Calculer  $f(0)$ ,  $f^{-1}(-2)$  et  $(f^{-1})'(-2)$ .