

Sommaire

I- Continuité et continuité à droite et à gauche d'une fonction en un point x_0

1-1/ Continuité d'une fonction en un point x_0

1-2/ Continuité à droite et à gauche d'une fonction en un point x_0

II- Continuité sur un intervalle

2-1/ Définitions

III- Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

3-1/ Propriétés

IV- Continuité des fonctions usuelles

4-1/ Propriétés

V- Image d'un intervalle par une fonction continue

5-1/ Propriétés

VI- Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

VII- Continuité de la composée de deux fonctions continues

IIIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

8-2/ Exercice 2

8-3/ Exercice 3

8-4/ Exercice 4

8-5/ Exercice 5

8-6/ Exercice 6

I- Continuité et continuité à droite et à gauche d'une fonction en un point x_0

1-1/ Continuité d'une fonction en un point x_0

Définition

f est une fonction définie sur D_f et I_{x_0} est un intervalle ouvert et contient x_0 et inclus dans D_f

$$f \text{ est continue au point } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Exemple

1-2/ Continuité à droite et à gauche d'une fonction en un point x_0

Définition 1

f est une fonction définie sur D_f et $I_d = [x_0, x_0 + r[$; ($r > 0$) est un intervalle inclus dans D_f

$$f \text{ est continue à droite au point } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Définition 2

f est une fonction définie sur D_f et $I_g =]x_0 - r, x_0]$; ($r > 0$) est un intervalle inclus dans D_f

$$f \text{ est continue à gauche au point } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Propriété

f est continue au point x_0 si et seulement si f continue à droite et à gauche de x_0 .

Ou encore :

$$f \text{ est continue au point } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Exemples

II- Continuité sur un intervalle

2-1/ Définitions

f est continue sur un intervalle ouvert $I =]a, b[\Leftrightarrow$ pour tout x de I ; f est continue en x .

f est continue sur $[a, b[\Leftrightarrow f$ est continue sur $]a, b[$ et f est continue à droite de a .

f est continue sur $]a, b] \Leftrightarrow f$ est continue sur $]a, b[$ et f est continue à gauche de b .

f est continue sur $[a, b] \Leftrightarrow f$ est continue sur $]a, b[$ et f est continue à droite de a et à gauche de b .

III- Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

3-1/ Propriétés

f est continue sur I et g est continue sur I .

Les fonctions $f + g$ et $f \times g$ et αf ($\alpha \in \mathbb{R}$) sont continues sur I .

Les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I (pour $x \in I$ tel que $g(x) \neq 0$).

IV- Continuité des fonctions usuelles

4-1/ Propriétés

Toute fonction polynomiale est continue sur \mathbb{R} .

Toute fonction rationnelle est continue sur toute intervalle inclu dans D_f .

Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont continues sur \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue sur toute intervalle inclu dans $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

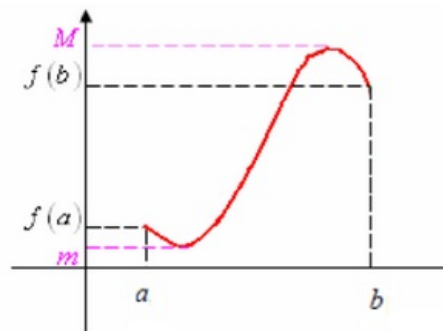
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

V- Image d'un intervalle par une fonction continue

5-1/ Propriétés

L'image du segment $[a, b]$ par une fonction continue est un segment $J = [m, M]$ (m est la plus petite image et M est la plus grande image par f des éléments de $[a, b]$) càd

$$f([a, b]) = [m, M]$$



L'image d'un intervalle I par une fonction continue est un intervalle J . On note $J = f(I)$

VI- Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

l'intervalle I	f est croissante sur I	f est décroissante sur I
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$]a; b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$]a; b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$[a; +\infty[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
$] -\infty; b]$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

VII- Continuité de la composée de deux fonctions continues

1-1/ Théorème

f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en x_0

f est continue sur I et g est continue sur $f(I)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I

1-2/ Applications

$f(x) = \sin(ax + b)$ et $g(x) = \cos(ax + b)$ sont continues sur \mathbb{R}

$h(x) = \tan(ax + b)$ est continue pour tout x tel que $ax + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Si f est positive et continue sur I alors $g(x) = \sqrt{f(x)}$ est continue sur I .

IIIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

1. Étudier la continuité de f en x_0 dans les cas suivants :

$$\text{a- } x_0 = 5 \text{ et } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 25} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\} \\ f(5) = 8 \end{cases}$$

$$\text{b- } x_0 = -1 \text{ et } \begin{cases} f(x) = \frac{2}{x^3 + 1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

$$\text{c- } x_0 = 3 \text{ et } \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} ; x \in [0; +\infty[\setminus \{3\} \\ f(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x+1} ; 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ f(x) = 2x + ax^2 ; \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

2. Déterminer la valeur de a pour que f est continue en $x_0 = \frac{1}{2}$

3. Etudier la continuité de f en x_0 :

$$x_0 = 1 \text{ et } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} ; x > 1 \\ f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{2 - x} - 1} ; x < 1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

8-2/ Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} \forall x > 2, f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ f(2) = 4 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f sur $[2; +\infty[$

8-3/ Exercice 3

1. Calculer l'image de l'intervalle I par f dans les cas suivantes:

$$\text{a- } f(x) = x^2 - 2x + 3 ; I = [-2; 3]$$

$$\text{b- } f(x) = \frac{x-1}{x+2} ; I =]-2; +\infty[$$

$$\text{c- } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 1 ; I =]-\infty; 1]$$

8-4/ Exercice 4

1. Étudier la continuité de f sur I dans les cas suivants :

a- $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $I = [1; +\infty[$

b- $f(x) = \sqrt{-\sin^2(x) + \sin(x) + 2}$; $I = \left[0; \frac{\pi}{6}\right[$

8-5/ Exercice 5

On considère la fonction f définie par $f(2) = 4$ et $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2}$ si $x \neq 2$

1. Déterminer D_f .

2. Montrer que f est continue en $x_0 = 2$.

3. Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}), f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 1}$

4. Justifier que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$.

8-6/ Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(1) = a$ et $f(x) = \frac{x^2\sqrt{x+3} - 2}{1 - x^2}$ si $x \neq 1$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en $x_0 = 1$?