

Sommaire

I- Primitives d'une fonction numérique

1-1/ Définition

1-2/ Propriété 1

1-3/ Propriété 2

1-4/ Propriété 3

II- Fonctions primitives de la somme de deux fonctions

III- Produit d'une fonction par un réel  $\alpha$

IV- Opérations sur les fonctions primitives

V- Fonctions primitives des fonctions usuelles

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

6-5/ Exercice 5

6-6/ Exercice 6

---

I- Primitives d'une fonction numérique

1-1/ Définition

Une fonction  $F$  est une primitive d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  si :

$$\forall x \in I : F'(x) = f(x)$$

**Exemple**

1-2/ Propriété 1

Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  admet une fonction primitive sur  $I$ .

### 1-3/ Propriété 2

$F$  est une primitive d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ .

Toute fonction primitive  $G$  de  $f$  sur  $I$  est de la forme  $G(x) = F(x) + c$ ; ( $c \in \mathbb{R}$ ).

### 1-4/ Propriété 3

$F$  est une primitive d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ .

Toute fonction primitive  $G$  de  $f$  sur  $I$  est de la forme  $G(x) = F(x) + c$ ; ( $c \in \mathbb{R}$ ).

$x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ ; il existe une seule fonction primitive  $G$  de  $f$  qui vérifie la condition  $G(x_0) = y_0$ .

## II- Fonctions primitives de la somme de deux fonctions

### Propriété

$F$  et  $G$  sont les primitives respectivement de  $f$  et  $g$  sur  $I$ .

On a  $F + G$  est une primitive de  $f + g$ .

### Exemple

## III- Produit d'une fonction par un réel $\alpha$

### Propriété

$F$  est la primitive de  $f$  sur  $I$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On a  $\alpha F$  est une primitive de  $\alpha f$ .

### Exemple

## IV- Opérations sur les fonctions primitives

$f(x)$	$F(x)$
$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x) + k$
$au'(x) ; (a \in \mathbb{R})$	$au(x)$
$u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$	$u(x) \times v(x) + k$
$\frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{1}{v(x)} + k$
$\frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{u(x)}{v(x)} + k$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + k$
$u'(x) \times [u(x)]^r ; (r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{[u(x)]^{r+1}}{r+1} + k$
$\frac{u'(x)}{u(x)} + k$	$\ln u(x)  + k$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$
$\cos(ax + b) ; (a \neq 0)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + k$
$\sin(ax + b) ; (a \neq 0)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + k$

## V- Fonctions primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$
$a \in \mathbb{R}$	$ax + k$
$x$	$\frac{1}{2}x^2 + k$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
$x^r ; (r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln x  + k$
$e^x$	$e^x + k$

## VI- Exercices

## 6-1/ Exercice 1

1. Déterminer les fonctions primitives de chacune des fonctions suivantes :

$$1 \quad f(x) = 8x^7 - 12x^4 - 14x^3 - 6x + 5$$

$$2 \quad f(x) = -4x^5 + \frac{2}{x^2} + 3$$

$$3 \quad f(x) = (11x + 1)^5$$

$$4 \quad f(x) = \frac{20x-6}{(5x^2-3x+2)^8}$$

$$5 \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

$$6 \quad f(x) = \frac{x^8}{\sqrt{4x^9+1}}$$

$$7 \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$8 \quad f(x) = \sqrt[3]{x^5}$$

$$9 \quad f(x) = \sqrt[3]{5x-7}$$

## 6-2/ Exercice 2

1. Déterminer la fonction primitive  $g$  de la fonction  $f$  tel que  $g$  prend la valeur  $y_0$  par  $g$  en  $x_0$ , pour chaque cas suivant :

$$1 \quad y_0 = 0 ; \quad x_0 = 1 ; \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$$

$$2 \quad y_0 = 1 ; \quad x_0 = 0 ; \quad f(x) = (x + 1)^3$$

## 6-3/ Exercice 3

1. Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle  $I$  :

$$1 \quad f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 ; \quad I = \mathbb{R}$$

$$2 \quad f(x) = \frac{3}{x^2} ; \quad I = [1, +\infty[$$

$$3 \quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} ; \quad I = [1, +\infty[$$

$$4 \quad f(x) = \frac{1}{x^2} ; \quad I = ]0, +\infty[$$

$$5 \quad f(x) = 3x^2(x^3 - 1) ; \quad I = \mathbb{R}$$

$$6 \quad f(x) = \frac{2x}{(x^2-3)^3} ; \quad I = [4, +\infty[$$

$$7 \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} ; \quad I = \mathbb{R}$$

## 6-4/ Exercice 4

Soit  $f : x \mapsto \frac{x^3-3x^2+7}{(x-2)^2}$  définie sur  $I = [3, +\infty[$ .

1. Déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$  de façon que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$ .

2. Calculer les primitives de  $f$  sur  $I = [3, +\infty[$ .

3. En déduire la primitive  $F$  de  $f$  sachant que  $F(3) = \frac{11}{2}$ .

## 6-5/ Exercice 5

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$

1. Déterminer les fonctions primitives de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

2. Déterminer la fonction primitive de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$  tel que  $F(1) = 3$ .

## 6-6/ Exercice 6

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{5x^4+40x^2+20x+80}{(x^2+4)^2}$ .

1. Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+4)^2} + c$ .
2. Déterminer la fonctions primitives  $F$  de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  tel que :  $F(0) = c$ .