Mathématiques : 2 Bac SPC-SVT-STE-STM

Séance 4 (Dérivation et étude des fonctions – Partie 1)

**Professeur : Mr CHEDDADI Haitam**

Sommaire



---

## I- Dérivabilité d'une fonction en un point $x_0$ – Dérivabilité à droite et à gauche en un point $x_0$

## 1-1/ Dérivabilité

### Définitions

Soit une fonction $f$ tel que son domaine de définition contient un intervalle ouvert $I$ et $x_0 \in I$

$f$ est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \mathrm{l} \in \mathbb{R}$ $\left( \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \mathrm{l} \in \mathbb{R} \right)$

$\mathrm{l} = f'(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé de $f$ en $x_0$

$f$ est dérivable à droite de $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to {x_0}^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \mathrm{l} \in \mathbb{R}$ $\left( \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \mathrm{l} \in \mathbb{R} \right)$

$\mathrm{l} = f'_d(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé à gauche de $f$ en $x_0$

$f$ est dérivable à gauche de $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to {x_0}^-} \lim \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \mathrm{l} \in \mathbb{R}$ $\left( \lim\limits_{h \to 0^-} \lim \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \mathrm{l} \in \mathbb{R} \right)$

$\mathrm{l} = f'_g(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé à gauche de $f$ en $x_0$

### Exemple

### Propriété

Soit une fonction $f$

$f$ est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable à droite et à gauche et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

### Exemple

## 1-2/ Interprétation géométrique des nombres dérivées $f'(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$

### Interprétation géométrique des nombres dérivées $f'(x_0)$

$f$ est une fonction dérivable au point $x_0$.

$(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la droite tangente $(T)$ à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point $A(x_0, f(x_0))$ (le point $x_0$).

L'équation cartésienne de la tangente $(T)$ à la courbe $(\mathscr{C}_f)$au point $x_0$ est
$(T)\ :\ y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$.

Si $f'(x_0) = 0$ alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

### Exemple

### Interprétation géométrique des nombres dérivées $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$

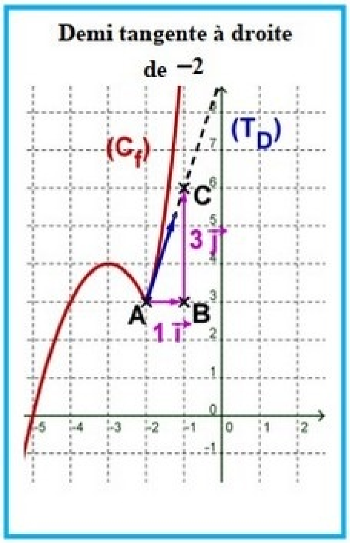
Si $f$ est dérivable à droite de $x_0$, alors on a une demi-tangente à droite de $x_0$ de coefficient directeur $f'_d(x_0)$.

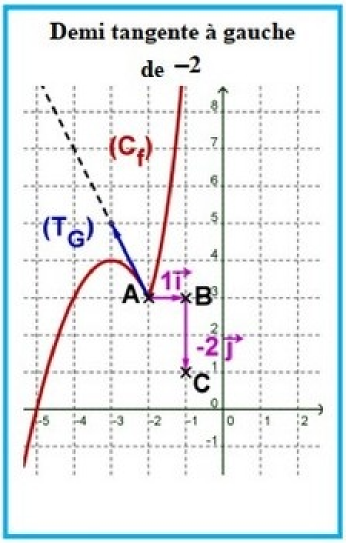
L'équation de la demi tangente à droite de $x_0$ est $(T_d)\ :\ y = (x - x_0)f'_d(x_0) + f(x_0)$ avec $x \geq x_0$.

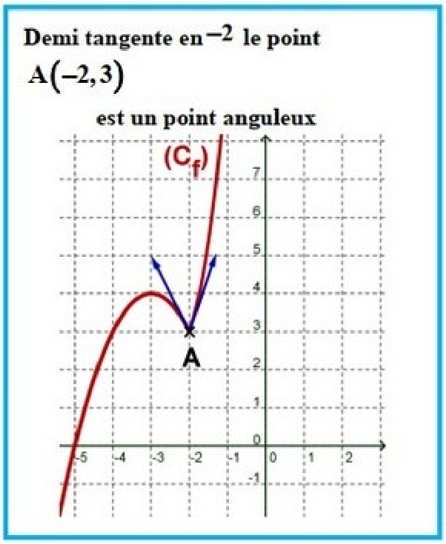
Si $f$ est dérivable à gauche de $x_0$, alors on a une demi-tangente à gauche de $x_0$ de coefficient directeur $f'_g(x_0)$.

L'équation de la demi tangente à gauche de $x_0$ est $(T_g)\ :\ y = (x - x_0)f'_g(x_0) + f(x_0)$ avec $x \leq x_0$.

Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, alors $f$ n'est pas dérivable en $x_0$ et le point $A(x_0, f(x_0))$ est appelé point anguleux.




### Exemple

### Remarque

Si $f$ n'est pas dérivable à droite (c.à.d. $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$), dans ce cas on a une demi tangente à droite de $x_0$ parallèle à l'axe des ordonnées.

Si  n'est pas dérivable à gauche (c.à.d. $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$), dans ce cas on a demi tangente à gauche de $x_0$ parallèle à l'axe des ordonnées.

### Exemple

## II- Dérivabilité sur un intervalle

### Définitions

$f$ est une fonction dérivable sur $I = ]a, b[ \Leftrightarrow f$ est dérivable en tout point $x_0$ de $I$.

$f$ est une fonction dérivable sur $I = [a, b[ \Leftrightarrow f$ est dérivable sur $I = ]a, b[$ et $f$ est dérivable à droite du point $a$.

$f$ est une fonction dérivable sur $I = ]a, b] \Leftrightarrow f$ est dérivable sur $I = ]a, b[$ et $f$ est dérivable à gauche du point $b$.

$f$ est une fonction dérivable sur $I = [a, b] \Leftrightarrow f$ est dérivable sur $I = ]a, b[$ et $f$ est dérivable à droite de $a$ et à gauche de $b$.

### Exemple

## III- La fonction dérivée première d'une fonction – la fonction dérivée seconde – dérivée nième d' une fonction

### Définitions

$f$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$.

La fonction $g$ qui relie chaque élément $x$ de $I$ par le nombre $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de $f$ et on note $g = f'$.

$g$ s'appelle la fonction dérivée de $f$.

La fonction dérivée de $f'$ sur $I$ s'appelle la fonction dérivée seconde (dérivée d'ordre 2), on la note $f''$ ou $f^{(2)}$.

En général : la dérivée d'ordre $n$ de $f$ est la fonction dérivée de $f^{(n-1)}$ (la dérivée de la fonction dérivée d'ordre $n-1$), et on note $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x)$.

### Exemple

## IV- Les opérations sur les fonctions dérivables

### Propriété

Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur $I$.

On a :

La fonction $f+g$ est dérivable sur $I$ et $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

La fonction $\alpha f$ est dérivable sur $I$ et $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$

La fonction $f \times g$ est dérivable sur $I$ et $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur $I$ $\forall x \in I, g(x) \neq 0$ et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$

La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $I$ $\forall x \in I, g(x) \neq 0$ et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = -\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

### Exemple

## V- Dérivabilité des fonctions polynomiales, rationnelles, trigonométriques et $f^n(x)$

### Propriété

Toute fonction polynomiale est dérivable sur son ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}$ et $(ax^n)' = nax^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition $D_f$.

$f$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$ :

La fonction $f^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur $I$ et on a $(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$.

Si pour tout $x \in I$, $f(x) \neq 0$, on a la fonction $f^p(x)$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ est dérivable sur $I$ et $(f^p)'(x) = pf^{p-1}(x)f'(x)$.

La fonction $f(x) = \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = -\sin(x)$.

La fonction $f(x) = \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \cos(x)$.

La fonction $f(x) = \tan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R} / \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\}$ avec $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

### Exemple

## VI- Dérivabilité de la composée de deux fonctions

### Propriété

Si $f$ est dérivable en $x_0$ et $g$ est dérivable en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en $x_0$ et on a :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

### Application

$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2x\sqrt{f(x)}}$ ; $x \in D_f$ *et* $f(x) > 0$

$(\sin(ax+b))' = a.\cos(ax+b)$ ; $x \in \mathbb{R}$

$(\cos(ax+b))' = -a.\sin(ax+b)$ ; $x \in \mathbb{R}$

$(\tan(ax+b))' = a.\left[1+\tan^2(ax+b)\right] = \frac{a}{\cos^2(ax+b)}$ ; $ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ; $\mathrm{k} \in \mathbb{Z}$

### Exemple

## VII- La fonction dérivée de la fonction réciproque

### Théorème

Si $f$ est dérivable en $x_0$ et $f(x_0) \neq 0$, alors la fonction $f^{-1}$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

ou encore $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

### Application:

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n \times \sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$\forall x \in I$ : $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{n \times \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$

### Exemple

## IIX- Tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles

| La fonction $f$ | $D_f$ Domaine de définition de $f$ | La fonction dérivée $f'$ | $D_{f'}$ Domaine de définition de $f'$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)=a$ | $D_f=\mathbb{R}$ | $f'(x)=0$ | $D_{f'}=\mathbb{R}$ |
| $f(x)=x$ | $D_f=\mathbb{R}$ | $f'(x)=1$ | $D_{f'}=\mathbb{R}$ |
| $; f(x)=x^n$ $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ | $D_f=\mathbb{R}$ | $f'(x)=nx^{n-1}$ | $D_{f'}=\mathbb{R}$ |
| $n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\}; f(x)=x^n$ | $D_f=\mathbb{R}$ | $f'(x)=nx^{n-1}$ | $D_{f'}=\mathbb{R}^*$ |
| $f(x)=\sqrt{x}$ | $D_f=[0,+\infty[$ | $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $D_{f'}=]0,+\infty[$ |
| $f(x)=\frac{1}{x}$ | $D_f=\mathbb{R}^*$ | $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ | $D_{f'}=\mathbb{R}^*$ |
| $f(x)=\sin x$ | $D_f=\mathbb{R}$ | $f'(x)=\cos x$ | $D_{f'}=\mathbb{R}$ |
| $f(x)=\cos x$ | $D_f=\mathbb{R}$ | $f'(x)=-\sin x$ | $D_{f'}=\mathbb{R}$ |
| $f(x)=\tan x$ | $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$ | $f'(x)=1+\tan^2 x$ | $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ |
| $f(x)=\sqrt{g(x)}$ | $x\in D_g / g(x)\geq 0$ | $f'(x)=\frac{g'(x)}{2\times\sqrt{g(x)}}$ | $x\in D_g / g(x)>0$ |
| $f(x)=a$ | $D_f=\mathbb{R}$ | $f'(x)=0$ | $D_{f'}=\mathbb{R}$ |
| $f(x)=x$ | $D_f=\mathbb{R}$ | $f'(x)=1$ | $D_{f'}=\mathbb{R}$ |
| $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}\ f(x)=x^n$ | $D_f=\mathbb{R}$ | $f'(x)=nx^{n-1}$ | $D_{f'}=\mathbb{R}$ |
| $n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\}; f(x)=x^n$ | $D_f=\mathbb{R}$ | $f'(x)=nx^{n-1}$ | $D_{f'}=\mathbb{R}^*$ |

# IX- Exerccies

## 9-1/ Exerccie 1

1. Dans chacun des cas suivantes, étudier la dérivabilité de la fonction $f$ en $x_0$ et interpréter le résultat graphiquement :

$$1\ \begin{cases} f(x)=\frac{x^3-x^2+2}{x+1}\ si\ \ x\neq -1 \\ f(-1)=5 \end{cases} ;\ x_0=-1$$

$$2\ \begin{cases} f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x-1}\ si\ \ x<1 \\ f(x)=x^2+x-2\ si\ \ x\geq 1 \end{cases} ;\ x_0=1$$

## 9-2/ Exerccie 2

1. Déterminer la fonction dérivée $f$' de la fonction $f$ dans chacun des cas suivants :

$$1\ \ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$$
$$2\ \ f(x)=\frac{x^3-4x}{x^2+1}$$
$$3\ \ f(x)=\left(\frac{x^2-2x}{x-1}\right)^4$$
$$4\ \ f(x)=x^3\times\cos\left(x^2-x\right)$$
$$5\ \ f(x)=x^5\times\sqrt[3]{x^2-3x+5}$$

## 9-3/ Exerccie 3

1. Déterminer la fonction dérivée $f$' de la fonction $f$ dans chacun des cas suivants :

| | |
|---|---|
| $1\ \ f(x)=\frac{2}{x}+\frac{3x^2+1}{x}$ <br> $2\ \ f(x)=\sqrt{x+2}\times(5x-3)^4$ | $5\ \ f(x)=\sin 2x\cos 3x$ <br> $6\ \ f(x)=\tan 3x$ <br> $7\ \ f(x)=\sqrt[3]{x^{11}}$ |

| | |
|---|---|
| 3 $f(x)=\sqrt{\frac{3x-5}{2-x}}$<br>4 $f(x)=\sin^3(x)$ | 8 $f(x)=\sqrt[5]{x^2-7x+12}$ |

## 9-4/ Exerccie 4

On considère la fonction numérique $f$ définie par : $f(x)=-x+\sqrt{x^2-x}$

1. Déterminer $D_f$ le domaine de définition de la fonction $f$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.
3. Étudier la dérivabilité à gauche de $f$ au point $x_0=0$ puis interpréter le résultat graphiquement.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)+1}{x-1}$, puis interpréter le résultat graphiquement.
5. Montrer que pour tout $x$ de $]-\infty,0[$ on a $f'(x)=-1+\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ puis déterminer son signe sur $]-\infty,0[$.
6. Calculer $f'(x)$ pour tout $x$ de $]1,+\infty[$ puis déterminer son signe sur $]1,+\infty[$.
7. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur $D_f$.

Soit $g$ la restriction de la fonction $f$ à l'intervalle $]-\infty,0]$.

8. Montrer que la restriction $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur l'intervalle $J$ qu'on déterminera.
9. Calculer $g(2)$ et $\left(g^{-1}\right)'\left(-2+\sqrt{2}\right)$.

## 9-5/ Exerccie 5

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}\ si\ x\in\Big]-\infty;2\Big[ \\ f(x)=\sqrt{x+2}+10\ si\ x\in\Big[2;+\infty\Big[ \end{cases}$$

1. Calculer $f(2)$ et $\lim\limits_{x\to2} f(x)$.
2. Est-ce que la fonction $f$ est continue en $2$ ?
3. Étudier la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}$.
4. Étudier la dérivabilité de $f$ en $2$, et interpréter géométriquement les résultats.

## 9-6/ Exerccie 6

On considère la fonction numérique $f$ définie par : $f(x)=x^3+3x-2$

1. Montrer que l'équation $f(x)=0$ une seule solution $\alpha$ sur $[0;+\infty[$, et que $\alpha\in]0;1[$.
2. Donner un encadrement d'amplitude $0,125$ de $\alpha$.
3. En déduire que $(\forall x\in[0;\alpha])$; $f(x)\leq0$ et $(\forall x\in[\alpha;+\infty[)$; $f(x)\geq0$.
4. Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ que l'on précisera.

5. Calculer $f(0)$, $f^{-1}(-2)$ et $\left(f^{-1}\right)'(-2)$.