

I- Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$.

Soit (\mathcal{C}_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Déterminer D_f et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Étudier les branches infinies de la courbe (\mathcal{C}_f) .
3. Étudier la position relative de la courbe (\mathcal{C}_f) et la droite (Δ) d'équation $(\Delta) : y = x$.
4. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0.
5. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
6. Dresser le tableau de variation de la fonction f .
7. Construire (Δ) et (\mathcal{C}_f) .

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \\ u_0 = 1 \end{cases} (\forall n \in \mathbb{N}).$$

8. Montrer par récurrence que $u_n > 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).
9. Montrer que (u_n) est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.
10. Calculer la limite de la suite (u_n) .

II- Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \\ u_0 = 1 \end{cases} (\forall n \in \mathbb{N}).$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a $u_n \geq 0$.
3. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, on a $u_n \geq n - 3$.
4. En déduire la limite de la suite (u_n) .

On définit la suite (v_n) par $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

5. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
6. En déduire que $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

Soit la somme S_n définie par : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

7. Déterminer l'expression de S_n en fonction de n .

