

Sommaire

## I- Fonction logarithme népérienne

1-1/ Définition

1-2/ Conséquences

1-3/ Signe de  $\ln(x)$ 

## II- Propriétés algébriques

## III- Limites

3-1/ Propriétés

3-2/ Remarques

IV- Étude de la fonction  $f(x) = \ln x$ V- Fonction de la forme  $f(x) = \ln(u(x))$ 

5-1/ Définition

5-2/ Vocabulaire et remarque

## VI- Fonction logarithme de base a

6-1/ Définition

6-2/ Cas particuliers

6-3/ Propriétés

## VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

7-2/ Exercice 2

7-3/ Exercice 3

7-4/ Exercice 4

7-5/ Exercice 5

7-6/ Exercice 6

---

## I- Fonction logarithme népérienne

### 1-1/ Définition

La fonction primitive  $F$  de  $f(x) = \frac{1}{x}$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  qui s'annule en 1 ( $F(1) = 0$ ) s'appelle la fonction logarithme népérienne

Elle est notée  $F(x) = \ln(x)$  ou  $F(x) = \ln x$ .

Avec  $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$

### Exemple

### 1-2/ Conséquences

$\ln 1 = 0$

La fonction  $f(x) = \ln x$  est définie sur  $]0, +\infty[$ .

La fonction  $f(x) = \ln x$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  (car  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ).

La fonction  $f(x) = \ln x$  est continue sur  $]0, +\infty[$  (car la fonction logarithme népérienne est dérivable).

La fonction  $f(x) = \ln x$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  (car  $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ ).

### 1-3/ Signe de $\ln(x)$

Soit  $x \in ]0, +\infty[$

Si :  $x = 1$ , donc :  $\ln 1 = 0$ .

Puisque  $x \rightarrow \ln(x)$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$

Si :  $x \in ]1, +\infty[$ , donc :  $x > 1 \Rightarrow \ln x > \ln 1 = 0$

Si :  $x \in ]0, 1[$ , donc :  $x < 1 \Rightarrow \ln x < \ln 1 = 0$

## II- Propriétés algébriques

Pour tous  $a > 0$  et  $b > 0$  et  $r \in \mathbb{Q}$ , on a :

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^r = r \cdot \ln a$$

### Exemple

## III- Limites

### 3-1/ Propriétés

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

### 3-2/ Remarques

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ , donc la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  admet une asymptote verticale : c'est la droite d'équation  $x = 0$  (l'axe des ordonnées).

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ , donc la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche parabolique (à déterminer).

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ , donc la courbe admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

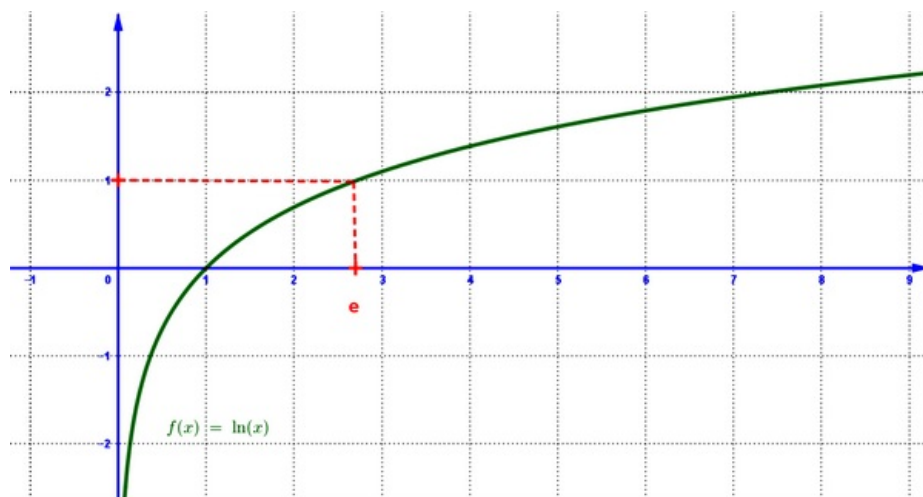
## IV- Étude de la fonction $f(x) = \ln x$

Domaine de définition :

Continuité :

Limites :

Sens de variation de  $f$  :



## V- Fonction de la forme $f(x) = \ln(u(x))$

### 5-1/ Définition

On pose  $g(x) = \ln x$  et la fonction  $u(x)$ , donc :  $f(x) = g \circ u(x) = g(u(x)) = \ln(u(x))$ .

Conclusion : la fonction  $f(x) = \ln(u(x))$  est la composée de deux fonctions.

Domaine de définition de  $f$  :  $x \in D_f \Leftrightarrow (x \in D_u \text{ et } u(x) > 0)$ .

Si de plus la fonction  $u(x)$  est dérivable on a :  $[\ln(u(x))]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ .

De même on a :  $[\ln(|u(x)|)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ .

### Exemple

### 5-2/ Vocabulaire et remarque

Soit  $u$  une fonction dérivable sur  $I$  et  $\forall x \in I : u(x) \neq 0$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$  est appelée la dérivée logarithmique de la fonction  $u$  sur  $I$ .

Puisque  $[\ln(|u(x)|)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ , donc les fonctions primitives de la fonction  $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$  sur  $I$  sont les fonctions de la forme  $F(x) = \ln|u(x)| + c$  avec  $c \in \mathbb{R}$ .

## VI- Fonction logarithme de base a

### 6-1/ Définition

Soit  $a \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  (c.à.d.  $a$  strictement positif et différent de 1).

La fonction définie par :

$$f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

S'appelle la fonction logarithme de base  $a$ .

On note cette fonction par  $f = \log_a$  d'où :  $f(x) = \log_a(x)$

### 6-2/ Cas particuliers

#### Cas $a=e$

$\log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$ , donc le logarithme de base  $e$  est le logarithme népérien.

#### Cas $a=10$

On obtient la fonction  $f(x) = \log_{10}(x)$  qui s'appelle la fonction logarithme décimale.

On note  $\log_{10} = \log$

On a :

$$\log(10^r) = r$$

$$\log(10) = 1$$

$$\log(1) = 0$$

#### Exemple

### 6-3/ Propriétés

Soit  $a \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  et pour tout  $x, y \in ]0, +\infty[$  on a :

$$\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^r) = r \times \log_a(x); \quad (r \in \mathbb{Q})$$

$$\log_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \times \log_a(x)$$

$$\log_a(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3} \times \log_a(x)$$

## VII- Exercices

### 7-1/ Exercice 1

Soit la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$ .

1. Montrer que  $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ , et en déduire que la fonction  $g$  est croissante sur  $]0, +\infty[$ .
2. Vérifier que  $g(1) = 0$ , puis en déduire que  $g(x) \leq 0$  pour tout  $x \in ]0, 1]$  et  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [1, +\infty[$ .

On considère  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$ .

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité 1 cm)

3. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ , puis interprété géométriquement ce résultat.
4. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
5. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = 0$  (on pourra poser  $t = \sqrt{x}$ ), puis montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .
6. Déterminer la branche infinie de  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $+\infty$ .
7. Montrer que  $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , puis en déduire que la fonction  $f$  est décroissante sur  $]0, 1]$  et croissante sur  $[1, +\infty[$ .
8. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$  puis en déduire que  $f(x) \geq 2$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ .
9. Construire la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  de  $f$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (on admettra que la courbe de  $f$  possède un seul point d'inflexion, on ne le déterminera pas).

## 7-2/ Exercice 2

Soit la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = \frac{2}{x} - 1 + 2 \ln x$ .

On considère le tableau de variations de la fonction  $g$  sur  $]0, +\infty[$  :

<b>x</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b><math>+\infty</math></b>
<b><math>g'(x)</math></b>		<b>- 0 +</b>	
<b><math>g(x)</math></b>		<b><math>+\infty</math></b> <b><math>\searrow</math></b>	<b><math>+\infty</math></b> <b><math>\nearrow</math></b> <b><math>g(1)</math></b>

1. Calculer  $g(1)$ .
2. En déduire à partir du tableau que  $g(x) > 0$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ .

On considère  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = 3 - 3x + 2(x + 1) \ln x$ .

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité 2 cm)

3. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ , et interpréter géométriquement ce résultat.
4. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (pour le calcul de la limite on pourra utiliser l'écriture suivante  $f(x) = x \left[ \frac{3}{x} - 3 + 2 \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \ln x \right]$ )
5. Montrer que la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique dont la direction est celle de l'axe des ordonnées.
6. Montrer que  $f'(x) = g(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ .
7. En déduire que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ , et dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
8. Montrer que  $I(0, 1)$  est un point d'inflexion de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .
9. Montrer que  $y = x$  est l'équation de la droite  $(T)$  tangente à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au point  $I$ .
10. Construire dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la droite  $(T)$  et la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .

### 7-3/ Exercice 3

Soit la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = x(x-1) + \ln x$ .

1. Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ .
2. Étudier les variations de la fonction  $g$ .
3. Calculer  $g(1)$ , puis déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0, +\infty[$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = (x-1)^2 + \ln^2(x)$ .

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(unité 1 cm)

4. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , et interpréter le résultat géométriquement.
5. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ , puis étudier la branche infinie de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $+\infty$ .
6. Montrer que  $\forall x \in ]0, +\infty[ : f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ .
7. En déduire les variations de  $f$  sur  $D_f$ .
8. Tracer  $(\mathcal{C}_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = ]0, 1]$ .

9. Montrer que la fonction  $h$  admet une fonction réciproque  $h^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.
10. Tracer  $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### 7-4/ Exercice 4

#### Partie 1

Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $g(x) = x^2 + x - 2 + 2 \ln x$

- Vérifier que  $g(1) = 0$ .

Soit le tableau de variations de la fonction  $g$  :

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

- Montrer que  $g(x) \leq 0$  pour tout  $x \in ]0; 1]$ , et que  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [1; +\infty[$ .

## Partie 2

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$$

Et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(\vec{0}; \vec{i}; \vec{j})$ . (Unité : 1cm)

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Montrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$ .
- Montrer que :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) : f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
- En déduire que la fonction  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $]0; 1]$  et croissante sur  $[1; +\infty[$ .
- Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[1; +\infty[$ .
- Résoudre dans l'intervalle  $]0, +\infty[$  l'équation  $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$ .
- En déduire que  $\mathcal{C}_f$  coupe la droite  $(D)$  en deux points dont on déterminera les coordonnées,
- Montrer que pour tout  $x \in [1; 2] : f(x) \leq x$ , et on déduire la position relative de la courbe  $(D)$  par rapport à la droite sur l'intervalle  $[1; 2]$ .
- Construire  $(D)$  et  $\mathcal{C}_f$  dans le repère  $(\vec{0}; \vec{i}; \vec{j})$ .

(On admet que  $\mathcal{C}_f$  possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 2, 4 et 2, 5).

## 7-5/ Exercice 5

On considère  $f$  définie sur  $[1, +\infty[$  par  $f(x) = x\sqrt{\ln x}$ .

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Montrer que  $f$  est continue sur  $[1, +\infty[$ .
- Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 1, et interpréter géométriquement le résultat

trouvé.

3. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
4. Déterminer l'intersection de  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\Delta) : y = x$ .
5. Tracer  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\Delta)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
6. Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $g$  définie sur  $J = [0; +\infty[$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = g(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

7. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $0 \leq u_n \leq e$
8. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
9. En déduire que  $(u_n)$  est convergente et trouver sa limite.

## 7-6/ Exercice 6

### Partie 1

Soit  $g$  la fonction définie sur  $] -1; +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(1+x)$

1. Dresser le tableau de variation de  $g$ .
2. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans l'intervalle  $] -1, +\infty[$  deux solutions  $0$  et  $\alpha$ , et vérifier que  $3,8 < \alpha < 4$ .
3. En déduire le signe de  $g(x)$  pour tout  $x \in ] -1; +\infty[$ .
4. Montrer que pour tout  $x \in ] -1; +\infty[$ , on a  $g(x) \leq 1$ .

### Partie 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$  si  $x > 0$  et  $f(0) = 0$ .

On désigne par  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .
2. Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $0$ .
3. Montrer que :  $(\forall x > 0) : f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$
4. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
5. Vérifier que  $f(\alpha) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$ .
6. Tracer la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .