Mathématiques : 2 Bac SPC-SVT-STE-STM

Séance 4 (Dérivation et étude des fonctions – Partie 1)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Dérivabilité d'une fonction en un point x_0 – Dérivabilité à droite et à gauche en un point x_0

1-1/ Dérivabilité

Définitions

Soit une fonction f tel que son domaine de définition contient un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$

f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R} \left(\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l \in \mathbb{R} \right)$

$l = f'(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé de f en x_0

f est dérivable à droite de $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to {x_0}^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R} \left(\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l \in \mathbb{R} \right)$

$l = f'_d(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en x_0

f est dérivable à gauche de $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to {x_0}^-} \lim \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R} \left(\lim\limits_{h \to 0^-} \lim \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l \in \mathbb{R} \right)$

$l = f'_g(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en x_0

Exemple

Propriété

Soit une fonction f

f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable à droite et à gauche et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Exemple

1-2/ Interprétation géométrique des nombres dérivées $f'(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$

Interprétation géométrique des nombres dérivées $f'(x_0)$

f est une fonction dérivable au point x_0.

$(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la droite tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point $A(x_0, f(x_0))$ (le point x_0).

L'équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$au point x_0 est $(T)\ :\ y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$.

Si $f'(x_0) = 0$ alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple

Interprétation géométrique des nombres dérivées $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$

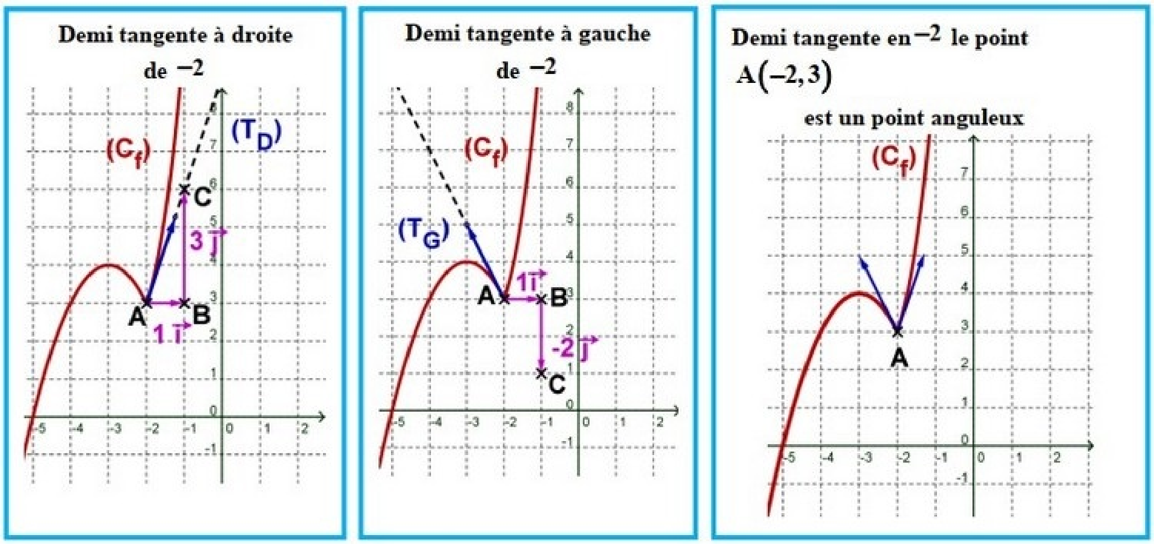
Si f est dérivable à droite de x_0, alors on a une demi-tangente à droite de x_0 de coefficient directeur $f'_d(x_0)$.

L'équation de la demi tangente à droite de x_0 est $(T_d)\ :\ y = (x - x_0)f'_d(x_0) + f(x_0)$ avec $x \geq x_0$.

Si f est dérivable à gauche de x_0, alors on a une demi-tangente à gauche de x_0 de coefficient directeur $f'_g(x_0)$.

L'équation de la demi tangente à gauche de x_0 est (T_g) : $y = (x - x_0)f'_g(x_0) + f(x_0)$ avec $x \leq x_0$.

Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, alors f n'est pas dérivable en x_0 et le point $A(x_0, f(x_0))$ est appelé point anguleux.



Exemple

Remarque

Si f n'est pas dérivable à droite (c.à.d. $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$), dans ce cas on a une demi tangente à droite de x_0 parallèle à l'axe des ordonnées.

Si n'est pas dérivable à gauche (c.à.d. $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$), dans ce cas on a demi tangente à gauche de x_0 parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple

II- Dérivabilité sur un intervalle

Définitions

f est une fonction dérivable sur $I =]a, b[\Leftrightarrow f$ est dérivable en tout point x_0 de I.

f est une fonction dérivable sur $I = [a, b[\Leftrightarrow f$ est dérivable sur $I =]a, b[$ et f est dérivable à droite du point a.

f est une fonction dérivable sur $I =]a, b] \Leftrightarrow f$ est dérivable sur $I =]a, b[$ et f est dérivable à gauche du point b.

f est une fonction dérivable sur $I = [a, b] \Leftrightarrow f$ est dérivable sur $I =]a, b[$ et f est dérivable à droite de a et à gauche de b.

Exemple

III- La fonction dérivée première d'une fonction – la fonction dérivée seconde – dérivée nième d' une fonction

Définitions

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction g qui relie chaque élément x de I par le nombre $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de f et on note $g = f'$.

g s'appelle la fonction dérivée de f.

La fonction dérivée de f' sur I s'appelle la fonction dérivée seconde (dérivée d'ordre 2), on la note f'' ou $f^{(2)}$.

En général : la dérivée d'ordre n de f est la fonction dérivée de $f^{(n-1)}$ (la dérivée de la fonction dérivée d'ordre $n-1$), et on note $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x)$.

Exemple

IV- Les opérations sur les fonctions dérivables

Propriété

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I.

On a :

La fonction $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

La fonction αf est dérivable sur I et $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$

La fonction $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I $\forall x \in I, g(x) \neq 0$ et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$

La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I $\forall x \in I, g(x) \neq 0$ et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = -\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Exemple

V- Dérivabilité des fonctions polynomiales, rationnelles, trigonométriques et $f^n(x)$

Propriété

Toute fonction polynomiale est dérivable sur son ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}$ et $(ax^n)' = nax^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition D_f.

f est une fonction dérivable sur un intervalle I :

La fonction f^n avec $n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur I et on a $(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$.

Si pour tout $x \in I$, $f(x) \neq 0$, on a la fonction $f^p(x)$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ est dérivable sur I et $(f^p)'(x) = pf^{p-1}(x)f'(x)$.

La fonction $f(x) = \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = -\sin(x)$.

La fonction $f(x) = \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \cos(x)$.

La fonction $f(x) = \tan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}/\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\}$ avec $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Exemple

VI- Dérivabilité de la composée de deux fonctions

Propriété

Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

Application

$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2x\sqrt{f(x)}}$; $x \in D_f$ *et* $f(x) > 0$

$(\sin(ax+b))' = a.\cos(ax+b)$; $x \in \mathbb{R}$

$(\cos(ax+b))' = -a.\sin(ax+b)$; $x \in \mathbb{R}$

$(\tan(ax+b))' = a.\left[1+\tan^2(ax+b)\right] = \frac{a}{\cos^2(ax+b)}$; $ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\mathrm{k} \in \mathbb{Z}$

Exemple

VII- La fonction dérivée de la fonction réciproque

Théorème

Si f est dérivable en x_0 et $f(x_0) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

ou encore $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Application:

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n \times \sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$\forall x \in I$: $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{n \times \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$

Exemple

IIX- Tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles

La fonction f	D_f Domaine de définition de f	La fonction dérivée f'	$D_{f'}$ Domaine de définition de f'
$f(x)=a$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
; $f(x)=x^n$ $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\}$; $f(x)=x^n$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$D_f=[0,+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'}=]0,+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$D_f=\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sin x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=\cos x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=-\sin x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\tan x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi ; k\in\mathbb{Z}$	$f'(x)=1+\tan^2 x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$
$f(x)=\sqrt{g(x)}$	$x\in D_g / g(x)\geq 0$	$f'(x)=\frac{g'(x)}{2\times\sqrt{g(x)}}$	$x\in D_g / g(x)>0$
$f(x)=a$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ $f(x)=x^n$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\}$; $f(x)=x^n$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$

IX- Exerccies

9-1/ Exerccie 1

1. Dans chacun des cas suivantes, étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 et interpréter le résultat graphiquement :

$$1 \quad \begin{cases} f(x)=\frac{x^3-x^2+2}{x+1} \; si \;\; x\neq -1 \\ f(-1)=5 \end{cases} ; \; x_0=-1$$

$$2 \quad \begin{cases} f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x-1} \; si \;\; x<1 \\ f(x)=x^2+x-2 \; si \;\; x\geq 1 \end{cases} ; \; x_0=1$$

9-2/ Exerccie 2

1. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$1 \;\; f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$$
$$2 \;\; f(x)=\frac{x^3-4x}{x^2+1}$$
$$3 \;\; f(x)=\left(\frac{x^2-2x}{x-1}\right)^4$$
$$4 \;\; f(x)=x^3\times\cos\left(x^2-x\right)$$
$$5 \;\; f(x)=x^5\times\sqrt[3]{x^2-3x+5}$$

9-3/ Exerccie 3

1. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$1 \;\; f(x)=\frac{2}{x}+\frac{3x^2+1}{x}$ $2 \;\; f(x)=\sqrt{x+2}\times(5x-3)^4$	$5 \;\; f(x)=\sin 2x\cos 3x$ $6 \;\; f(x)=\tan 3x$ $7 \;\; f(x)=\sqrt[3]{x^{11}}$

3 $f(x)=\sqrt{\frac{3x-5}{2-x}}$ 4 $f(x)=\sin^3(x)$	8 $f(x)=\sqrt[5]{x^2-7x+12}$

9-4/ Exerccie 4

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=-x+\sqrt{x^2-x}$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.
3. Étudier la dérivabilité à gauche de f au point $x_0=0$ puis interpréter le résultat graphiquement.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)+1}{x-1}$, puis interpréter le résultat graphiquement.
5. Montrer que pour tout x de $]-\infty,0[$ on a $f'(x)=-1+\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ puis déterminer son signe sur $]-\infty,0[$.
6. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]1,+\infty[$ puis déterminer son signe sur $]1,+\infty[$.
7. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f.

Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $]-\infty,0]$.

8. Montrer que la restriction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J qu'on déterminera.
9. Calculer $g(2)$ et $\left(g^{-1}\right)'\left(-2+\sqrt{2}\right)$.

9-5/ Exerccie 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}\ si\ x\in\left]-\infty;2\right[\\ f(x)=\sqrt{x+2}+10\ si\ x\in\left[2;+\infty\right[\end{cases}$$

1. Calculer $f(2)$ et $\lim\limits_{x\to2} f(x)$.
2. Est-ce que la fonction f est continue en 2 ?
3. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
4. Étudier la dérivabilité de f en 2, et interpréter géométriquement les résultats.

9-6/ Exerccie 6

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=x^3+3x-2$

1. Montrer que l'équation $f(x)=0$ une seule solution α sur $[0;+\infty[$, et que $\alpha\in]0;1[$.
2. Donner un encadrement d'amplitude $0,125$ de α.
3. En déduire que $(\forall x\in[0;\alpha])$; $f(x)\leq0$ et $(\forall x\in[\alpha;+\infty[)$; $f(x)\geq0$.
4. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

5. Calculer $f(0)$, $f^{-1}(-2)$ et $\left(f^{-1}\right)'(-2)$.